## KINEMATIKA

**Osnovni elementi kinematike**

Kinematika je nauka o vrstama kretanja tela.

Zbog toga ćemo početi sa definicijom kretanja tela: ***telo se kreće ako menja položaj u odnosu na neko drugo telo.***

To drugo telo se naziva referentno telo, a ako se referentnom telu pridruži izabrani koordinatni sistem tada se on naziva referentni sistem.

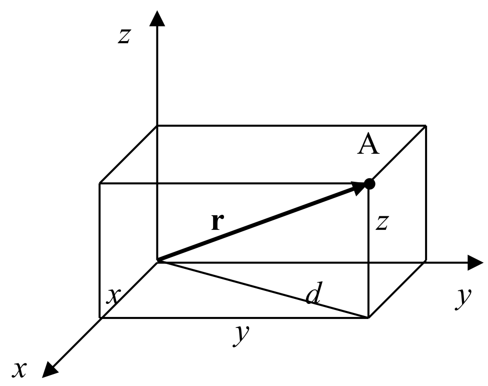
Svako kretanje tela je relativno (kao i mirovanje), što znači da se izabrano telo kreće u odnosu na neka referentna tela, dok istovremeno u odnosu na druga referentna tela miruje. Dakle ne postoji ni apsolutno kretanje, ni apsolutno mirovanje tela, što opet znači da ne postoji telo koje se kreće u odnosu na sva moguća referentna tela, niti telo koje bi u odnosu na njih mirovalo. Primer: drvo miruje u odnosu na Zemlju, ali se istovremeno kreće u odnosu na Sunce.

Telo često zamenjujemo tačkom, najčešće radi lakšeg prikazivanja na slici, ali i radi lakšeg definisanja nekih pojmova ili fizičkih veličina (vidi definiciju putanje). Pritom gubimo oblik i dimenzije tela, a zadržavamo njegov položaj i njegovu masu. Takvu tačku (zbog zadržavanja mase tela) nazivamo materijalna tačka.

S obzirom na definiciju kretanja tela, možemo zaključiti da je određivanje položaja jednog tela u odnosu na drugo (referentno) jako važno, pa ćemo zato sada razmotriti dva od više načina određivanja položaja. Dakle položaj izabrane materijalne tačke u odnosu na referentni sistem može se odrediti pomoću:

- vektora položaja te tačke – **r**, i
- Dekartovih pravouglih koordinata te tačke – *x, y* i *z*.

Na sl. 13. prikazana su oba ova načina za određivanje položaja izabrane tačke A, u odnosu na dati referentni sistem.




sl. 13.

U oba slučaja je potrebno znati najmanje tri podatka da bi se tačno utvrdio položaj tačke A.

U slučaju kada položaj određujemo pomoću vektora položaja **r,** treba znati dužinu, pravac i smer tog vektora.

U slučaju određivanja položaja pomoću koordinata, tada treba znati njihove dužine, dakle opet tri podatka.

Minimum potrebnih podataka je uvek 3 zato što je naš prostor trodimenzionalan.

Postoji geometrijska mogućnost da se uspostavi veza između dužine vektora položaja r i dužine koordinata *x*, *y* i *z*:

$r^2 = d^2 + z^2$, a kako je: $d^2 = x^2 + y^2$, zamenom se dobija: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Sva kretanja tela se mogu podeliti na dve osnovne vrste kretanja:

- translatorno kretanje ili translacija i
- rotaciono kretanje ili rotacija.

***Telo se kreće translatorno ako svaka prava linija, vezana za to telo, ostaje pri kretanju paralelna svom početnom položaju.***

Posledica ovakve definicije je da sve tačke na telu koje se kreće translatorno prelaze jednake puteve.

***Telo se kreće rotaciono ako se sve tačke tog tela (izuzimajući tačke na osi rotacije) kreću po kružnicama i ako su centri tih kružnica u osi rotacije.***

Telo se može kretati: čisto translatorno, čisto rotaciono, ali se može kretati istovremeno i translatorno i rotaciono. Za ovo poslednje primer je kretanje Zemlje, ona orbitira oko Sunca (translacija), a istovremeno rotira oko svoje ose.

Nadalje ćemo razmatrati posebno kinematiku translatornog, a posebno kinematiku rotacionog kretanja.

## KINEMATIKA TRASLACIJE

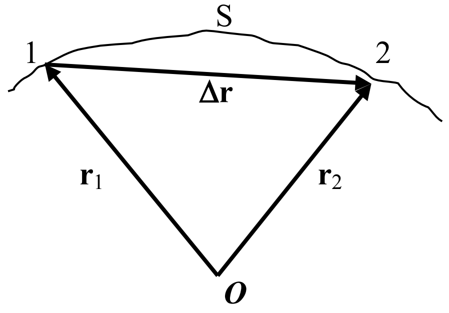
Osnovne kinematičke veličine u translaciji su:
- putanja - ($m$)
- pređeni put $S$ ($m$)
- pomeraj $\Delta\vec{r}$ ($m$)
- brzina $\vec{v}$ ($m/s$)
- ubrzanje $\vec{a}$ ($m/s^2$)
- vreme $t$ ($s$)

**Putanja, put i pomeraj**

***Putanja je linija koju kao svoj trag ostavlja za sobom materijalna tačka koja se kreće.***
Putanja može biti pravolinijska i krivolinijska. Putanja je skalarna veličina.

***Put je deo putanje koji telo pređe za određeno vreme.***
Put može biti pravolinijski i krivolinijski. Put je skalarna veličina.

Jasno je da krivolinijski put ne može biti vektor, međutim put ne može biti vektor ni kada je pravolinijski zato što ne može da ima smer. Kada bi put imao smer tada bi pri povratnom kretanju duž takvog puta telo prešlo ukupan put jednak nuli. Uzrok tome bi bio pozitivan put pređen kada se telo kreće u smeru puta, a negativan kada se telo kreće u smeru suprotnom od smera puta.



sl. 14.

Na sl. 14. prikazan je put S kao deo krivolinijske putanje, ograničen tačkama 1 i 2. Položaj ovih tačaka određen je u odnosu na referentnu tačku O, vektorima položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. ***Vektor pomeraja $\Delta\vec{r}$ tada predstavlja vektorsku razliku vektora položaja krajnje i početne tačke tako određenog puta:***

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

***Pomeraj je vektor koji spaja početnu i krajnju tačku puta.***

**Vreme** $t$ ($s$) se u kinematici pojavljuje u obliku:
- vremenskih koordinata $t_1, t_2, ...$ i
- vremenskog intervala $\Delta t$.

***Vremenske koordinate određuju početak ili završetak nekog događaja u okviru standardnog merenja vremena.***

***Vremenski interval određuje trajanje datog događaja.***

Primer: Autobus je krenuo ujutro u 8 $h$ iz Niša, a u Beograd je stigao u 12 $h$ u podne istog dana. Vožnja je trajala 4 $h$.

U ovom primeru, vremenski podaci: $t_1 = 8\ h$ i $t_2 = 12\ h$ su vremenske koordinate, a $\Delta t = 4\ h$ je vremenski interval. Može se videti da je: $\Delta t = t_2 - t_1$ .

**Brzina**

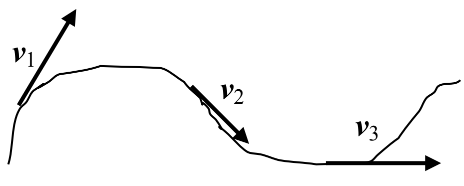
Brzina je vektor pa je definisna svojom: brojnom vredošću, pravcem i smerom.

***Brojna vrednost brzine određuje koliki put telo pređe u jedinici vremena.***

Primer: $v = 80$ $km/h$ znači da telo sa ovom brojnom vrednošću brzine pređe put od 80 $km$. za vreme od 1 $h$. Pritom treba uočiti da je 1 $h$ jedinica vremena.

Pravac i smer vektora brzine se različito određuju u zavisnosti od oblika putanje.

sl. 15.a



sl. 15.b

Ako je kretanje pravolinijsko (sl. 15.a), tada je pravac vektora brzine određen putanjom, dok je smer vektora brzine jednak smeru kretanja tela.

Ako je kretanje krivolinijsko (sl. 15.b), tada je pravac vektora brzine tela, koje se nalazi u datoj tački putanje, određen tangentom na krivolinijsku putanju u toj tački. Smer vektora brzine je i tada jednak smeru kretanja tela.

Prema brzini sva translatorna kretanja možemo podeliti na četiri vrste:

1. ravnomerno – kod koga je brojna vrednost brzine stalna $v = \text{const.}$
2. neravnomerno – kod koga je brojna vrednost brzine promenljiva $v \neq \text{const.}$
3. pravolinijsko – kod koga je pravac vektora brzine stalan i
4. krivolinijsko – kod koga je pravac vektora brzine promenljiv.

Svako realno translatorno kretanje tela nastaje kao kombinacija dva od prethodno četiri navedena kretanja, pri čemu se kombinuje neko od prva dva sa nekim od trećeg ili četvrtog kretanja.

Razlikujemo dve vrste brzine: srednju i trenutnu brzinu.

***Srednja brzina se, kod ma kog translatornog kretanja izračunava kada se ukupan pređeni put podeli sa ukupnim vremenom potrebnim da se taj put pređe.***

$$v_{sr} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Da bi se definisala trenutna brzina, treba razmotriti šta je to trenutak vremena. Ako bi smo uzeli ma koju konkretnu vrednost vremena, ma koliko ona bila mala, uvek bi smo mogli da zadamo i neku manju vrednost vremena, koja bi tada bila bliža pojmu trenutka. Zato se u fizici pod pojmom trenutka podrazumeva beskonačno mali interval vremena, što se obeležava sa: $\Delta t \to 0$. Dakle:

***trenutna brzina je jednaka srednjoj brzini ali izmerenoj u beskonačno malom intervalu vremena:***

$$v_{tr} = v_{sr}, \quad (\Delta t \to 0) \qquad \text{tj.}$$

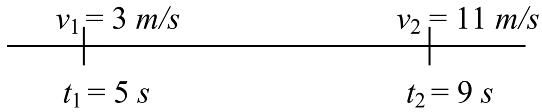
$$v_{tr} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (\Delta t \to 0)$$

**Ubrzanje**

Ubrzanje je vektor, pa je zato definisan svojom brojnom vrednošću, pravcem i smerom.

***Brojna vrednost ubrzanja određuje kolika je promena brzine u jedinici vremena.***

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$




sl. 16.

Primer: Neka se telo kreće duž pravog puta tako da je njegova brojna vrednost brzine promenljiva. Uzmimo da je brzina u tački 1 manja od brzine u tački 2, što znači da telo ubrzava (sl. 16.). $\Delta v$ – u obrascu za ubrzanje – označava promenu brzine koja se u datom primeru može izračunati kao razlika krajnje i početne brzine tj. $\Delta v = v_2 - v_1$. Već znamo da je interval vremena koliko traje ta promena brzine: $\Delta t = t_2 - t_1$. Dakle:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{11m/s - 3m/s}{9s - 5s} = \frac{8m/s}{4s} = 2\ m/s^2.$$

Vidimo da je brojna vrednost ubrzanja $a = 2\ m/s^2$. Ovaj podatak znači da se brojna vrednost brzine povećava, svake sekunde, za 2 *m/s*. Dakle u šestoj sekundi brzina je 5 *m/s*, u sedmoj je 7 *m/s*, u osmoj 9 *m/s*, da bi u devetoj sekundi brzina kao na slici bila 11 *m/s*. To je smisao definicije brojne vrednosti ubrzanja.

Ako je kretanje tela usporeno ubrzanje ima negativnu brojnu vrednost koja određuje za koliko se smanji brzina svake sekunde.

Ubrzanje postoji da bi odredilo promenu brzine. Dakle, ubrzanje se može očekivati kod onih kretanja kod kojih promena brzine postoji, a to su sva neravnomerna i sva krivolinijska kretanja. Iz istog razloga ubrzanja nema kod kretanja kod kojih je brzina stalna, a to su ravnomerna i pravolinijska kretanja.

Komplikacije u vezi sa ubrzanjem nastaju zato što je brzina vektor, pa joj se može menjati brojna vrednost - kod neravnomernih kretanja, ali i pravac - kod krivolinijskih kretanja. Ove dve promene brzine su raznorodne, pa ih ne može određivati isto ubrzanje. Zato u kinematici postoje dve vrste ubrzanja:

- tangencijalno ubrzanje $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ i
- normalno ubrzanje $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$.

***Tangencijalno ubrzanje određuje promenu brojne vrednosti brzine, pa se zato javlja kod svih neravnomernih kretanja.***

***Normalno ubrzanje određuje promenu pravca brzine, pa se zato javlja kod svih krivolinijskih kretanja.***

| | | |
|---|---|---|
| ravnomerno kretanje | $v$ = const. | $a_{\mathrm{t}} = 0$, nema ga |
| neravnomerno kretanje | $v \neq$ const. | $a_{\mathrm{t}} \neq 0$, postoji |
| pravolinijsko kretanje | pravac $\boldsymbol{v}$ = const. | $a_{\mathrm{n}} = 0$, nema ga |
| krivolinijsko kretanje | pravac $\boldsymbol{v} \neq$ const. | $a_{\mathrm{n}} \neq 0$, postoji |

***Ukupno ubrzanje tela je jednako vektorskom zbiru tangencijalnog i normalnog ubrzanja,*** tj.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

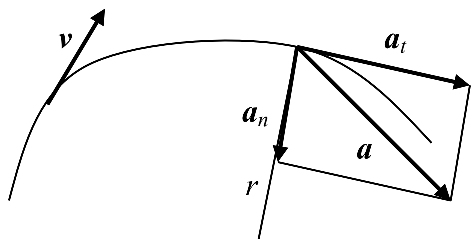
Kod ravnomerno – pravolinijskog kretanja telo nema ni jedno ubrzanje, pa telo nema ni ukupno ubrzanje: $\boldsymbol{a} = 0$.

Kod ravnomerno – krivolinijskih kretanja telo ima samo normalno ubrzanje, pa je ukupno ubrzanje jednako normalnom ubrzanju: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$.

Kod neravnomerno – pravolinijskih kretanja telo ima samo tangencijalno ubrzanje, pa je ukupno ubrzanje jednako tangencijalnom ubrzanju: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t$ .

Kod neravnomerno – krivolinijskih kretanja telo ima oba ubrzanja, pa je zato ukupno ubrzanje jednako njihovom zbiru: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$.

Pogledajmo sada dva slučaja: u prvom kretanje je ubrzano - krivolinijsko (sl. 17.a), dok je u drugom kretanje usporeno – krivolinijsko (sl. 17.b).

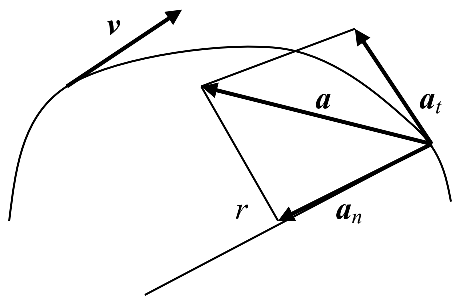


sl. 17.a (ubrzano)

Sa slika se može zaključiti o pravcu i smeru tangencijalnog i normalnog ubrzanja, ali se može videti i razlog za njihove nazive.

Vektor tangencijalnog ubrzanja se crta uvek duž tangente na krivolinijsku putanju tela (ako je putanja tela pravolinijska, tada se $\boldsymbol{a}_t$ crta duž te putanje). Smer $\boldsymbol{a}_t$ zavisi od toga da li je kretanje ubrzano ili usporeno. Ako je kretanje tela ubrzano, tada se $\boldsymbol{a}_t$ crta u smeru kretanja tela, a ako je kretanje usporeno, tada je smer $\boldsymbol{a}_t$ suprotan smeru kretanja tela.

Vektor normalnog ubrzanja se crta uvek duž poluprečnika krivine, a uvek je usmeren ka centru krivine. Naziv – normalno, potiče od pravog ugla koji gradi sa $\boldsymbol{a}_t$. Normalno ubrzanje ima više naziva u fizici: centripetalno – jer je usmereno ka centru (lat. peteo, petere – vući, privući), centralno – iz istog razloga i radijalno – jer se crta duž radijusa (poluprečnika) krivine.



sl. 17.b (usporeno)

Postoji srednje i trenutno ubrzanje.

***Srednje ubrzanje se izračunava kada se ukupna promena brzine podeli sa ukupnim vremenom potrebnim da se ta promena desi.***

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Kao i kod trenutne brzine, uvodimo pojam beskonačno kratkog intervala vremena, koje odgovara pojmu trenutka. Tada je: ***trenutno ubrzanje jednako srednjem ubrzanju ali izmerenom u beskonačno malom intervalu vremena*** tj.

$$a_{tr} = a_{sr}, \quad (\Delta t \to 0) \quad \text{tj.}$$

$$a_{tr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (\Delta t \to 0).$$

**Ravnomerno pravolinijsko kretanje**

Kod ovog kretanja brojna vrednost brzine je stalna – zato što je kretanje ravnomerno, a stalan je i pravac brzine – zato što je kretanje pravolinijsko. Dakle telo koje se kreće ravnomerno pravolinijski nema ni tangencijalno, ni normalno ubrzanje tj. ovo je jedino kretanje bez ubrzanja.

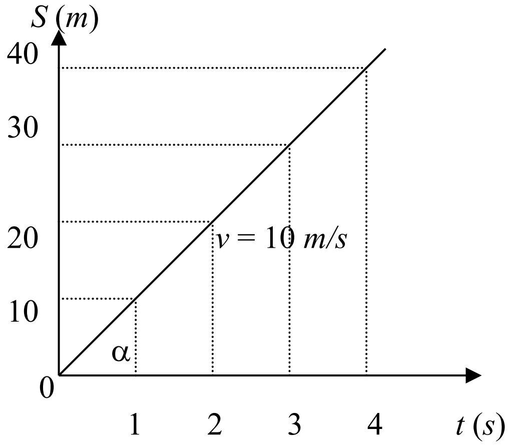
Veličine koje opisuju ovo kretanje su:

- pređeni put $S$ ($m$),
- brzina $v$ ($m/s$) i
- vreme $t$ ($s$).

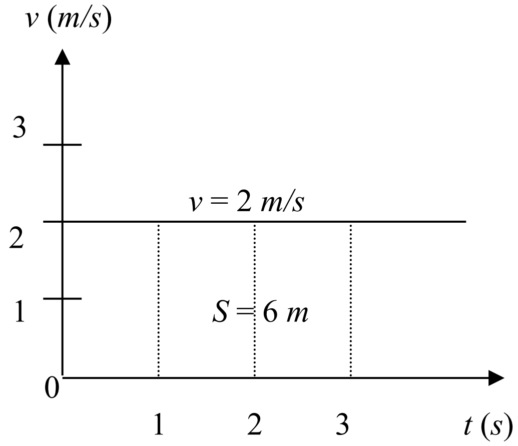
Obrazac koji ih povezuje glasi: $v = \dfrac{S}{t}$, tj. $S = v \cdot t$, ili $t = \dfrac{S}{v}$.

Ovaj obrazac se sme koristiti samo kod ravnomernih kretanja, tj. kod kretanja kod kojih je brojna vrednost brzine stalna.

Pogledaćemo sada grafički prikazanu zavisnost: pređenog puta od vremena i brzine od vremena.




graf. 1.a




graf. 1.b

Na graf. 1.a prikazana je zavisnost puta od vremena, pri brojnoj vrednosti brzine $v = 10$ $m/s$. Ugao $\alpha$ između grafika i $t$ – ose zavisi od brzine tela. Što je brzina tela veća, to je i nagibni ugao $\alpha$ veći.

Na graf. 1.b prikazana je zavisnost brzine od vremena, pri brojnoj vrednosti brzine $v = 2$ $m/s$. Grafik je paralelan sa $t$ – osom zato što je brojna vrednost brzine stalna tokom vremena. Sa grafika se vidi da je površina ispod grafika jednaka pređenom putu. To je površina pravougaonika osnovice $t = 3$ $s$ i vertikalne stranice $v = 2$ $m/s$. Njegova površina je: $P = v \ t = 2$ $m/s$ $3$ $s$ $= 6$ $m$, a to je dužina pređenog puta u toku $t = 3$ $s$ kretanja.

Osnovne četiri kombinacije translatornih kretanja tela se mogu prikazati matematičkim jezikom na sledeći način:

- ravnomerno pravolinijsko kretanje: $\boldsymbol{v} = \text{const}$, $\boldsymbol{a} = 0$,
- neravnomerno pravolinijsko kretanje: $\boldsymbol{v} \neq \text{const}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t$,
- ravnomerno krivolinijsko kretanje: $\boldsymbol{v} \neq \text{const}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$ i
- neravnomerno krivolinijsko kretanje: $\boldsymbol{v} \neq \text{const}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$

što su ujedno i osnovne karakteristike ovih kretanja.

**Pravolinijsko kretanje sa stalnim ubrzanjem**

U ovom slučaju telo se kreće po pravolinijskoj putanji, a brojna vrednost njegove brzine raste ili opada uvek za istu vrednost. Primer:

$v_0 = 2\ m/s$ $\quad v_1 = 5\ m/s$ $\quad v_2 = 8\ m/s$ $\quad v_3 = 11\ m/s$ ...

$t_0 = 0\ s$ $\quad t_1 = 1\ s$ $\quad t_2 = 2\ s$ $\quad t_3 = 3\ s$ ...

sl. 18.

Iz primera se vidi da brojna vrednost brzine, svake sekunde, poraste za istu vrednost (3 *m/s*), pa je jasno da je brojna vrednost tangencijalnog, a samim tim i ukupnog ubrzanja jednaka 3 $m/s^2$, ( normalno ubrzanje ne postoji kod ovog kretanja jer je pravolinijsko, pa je pravac brzine stalan). Ova vrednost ubrzanja se može izračunati između ma koje dve pozicije tela pri kretanju. Na primer:

$$a = a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \frac{11m/s - 5m/s}{3s - 1s} = \frac{6m/s}{2s} = 3\ \mathrm{m/s^2}.$$

Dakle matematički opis ovog kretanja bi bio: $\mathbf{v} \neq \mathrm{const}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t = \mathrm{const}$.

Osnovne veličine koje opisuju ovo kretanje su:

- početna brzina $v_0$
- krajnja brzina $v$
- srednja brzina $v_{sr}$
- pređeni put $S$
- ubrzanje $a$
- vreme $t$

Obrasci koji povezuju ove veličine su:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$v = v_0 \pm a \cdot t$$

$$v_{sr} = v_0 \pm \frac{a \cdot t}{2}, \quad v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2}, \quad v_{sr} = \frac{S}{t}$$

$$S = v_0 \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v^2 = v_0^2 \pm 2 \cdot a \cdot S$$

<u>Pogledajmo primenu ovih obrazaca:</u>

U primeru sa sl. 18. izračunati brzinu na kraju šeste sekunde kretanja, pređeni put i srednju brzinu tela u toku tih 6 sekundi.

$$v = v_0 + a \cdot t = 2m/s + 3m/s^2 \cdot 6s = 2m/s + 18m/s = 20m/s.$$

U stvari postoji jednostavniji način da se izračuna ova brzina – ako nastavimo niz podataka na sl. 18. koji je prekinut u trećoj sekundi, vidimo da je u četvrtoj sekundi brzina 14 *m/s*, u petoj 17 *m/s*, a u šestoj je 20 *m/s*, što je i izračunato iz obrasca.

$$v_{sr} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2} = 2m/s + \frac{3m/s^2 \cdot 6s}{2} = 2m/s + 9m/s = 11m/s$$

Srednju brzinu možemo izračunati i iz obrasca:

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{2m/s + 20m/s}{2} = 11m/s$$

Najbrži način je da upotrebimo sliku i da na njoj potražimo sredinu datog vremena, a to je treća sekunda i tada je srednja brzina u stvari brzina u tom trenutku. Uostalom to ne bi trebalo da nas iznenadi jer ako obrazac za srednju brzinu napišemo u obliku: $v_{sr} = v_0 + a \cdot \frac{t}{2}$, jasno je da on izračunava upravo brzinu u trenutku koji iznosi $\frac{t}{2}$.

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 2m/s \cdot 6s + \frac{3m/s^2 \cdot (6s)^2}{2} = 12m + 1{,}5m/s^2 \cdot 36s^2 = 12m + 54m = 66m$$

I ovde postoji više načina za izračunavanje pređenog puta. Na primer:

$$S = v_{sr} \cdot t = 11m/s \cdot 6s = 66m$$

Uostalom može se videti da je obrazac $S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ i nastao iz obrasca $S = v_{sr} \cdot t$, tako što se u ovaj poslednji zameni $v_{sr} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}$:

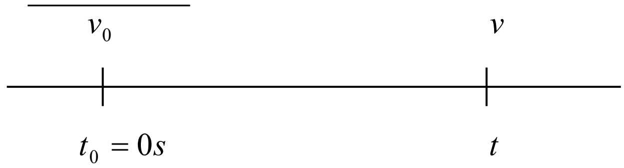
$$S = v_{sr} \cdot t = (v_0 + \frac{a \cdot t}{2}) \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Brzinu u šestoj sekundi kretanja možemo izračunati i iz obrasca:

$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot S = (2m/s)^2 + 2 \cdot 3m/s^2 \cdot 66m = 4m^2/s^2 + 396m^2/s^2 = 400m^2/s^2$, pa je:

$v = \sqrt{400m^2/s^2}$ , pa je: $v = 20m/s$.

**<u>Izvođenje obrasca</u>**: $v = v_0 + a \cdot t$




sl. 19.

U slučaju na sl. 19. samo početna vremenska koordinata $t_0$ ima stalnu vrednost, jer je uvek jednaka nuli. Ostale tri veličine imaju proizvoljne vrednosti. Obrazac za ubrzanje između zadatih tačaka glasi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

zbog $t_0 = 0$ dobija se:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

množenjem cele jednačine vremenom $t$, prethodna jednačina dobija oblik:

$$a \cdot t = v - v_0$$

prebacivanjem sabiraka se dobija:

$$-v = -v_0 - a \cdot t$$

a množenjem prethodnog izraza sa (-1) dobijamo traženi obrazac:

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

**<u>Izvođenje obrasca</u>**: $v_{sr} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}$

Pođimo od sledeća dva obrasca: $v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2}$ i $v = v_0 + a \cdot t$. Zamenom drugog obrasca u prvi dobija se:

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} = \frac{2v_0 + a \cdot t}{2} = \frac{2v_0}{2} + \frac{a \cdot t}{2}$$

odakle se dobija:

$$v_{sr} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}.$$

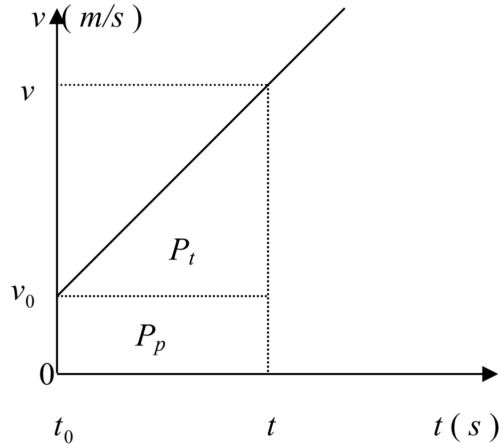
**Izvođenje obrasca**: $S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$

Ovaj obrazac je već izveden iz obrasca za srednju brzinu, u okviru primene obrazaca na primer sa sl. 18. Međutim, on se može izvesti i grafičkom metodom tj sa grafika koji prikazuje zavisnost brzine tela od proteklog vremena (graf. 2.). Kao i kod ravnomerno pravolinijskog kretanja, pređeni put je brojno jednak površini ispod grafika. Ova površina se može podeliti na:

-površinu pravougaonika osnovice $t$ i visine $v_0$ i

-površinu pravouglog trougla sa horizontalnom katetom $t$ i vertikalnom katetom $v - v_0$.

Na taj način dužina pređenog puta postaje jednaka zbiru njihovih površina: $S = P_p + P_t$



graf. 2.

pa je:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{(v - v_0) \cdot t}{2}$$

zamenom: $v = v_0 + a \cdot t$ u prethodni izraz dobija se:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{(\cancel{v_0} + a \cdot t - \cancel{v_0}) \cdot t}{2}$$

sledi:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

**Izvođenje obrasca**: $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot S$

Da bi se izveo ovaj obrazac potrebno je da se, iz obrasca $v = v_0 + a \cdot t$, izrazi vreme, pa da se taj izraz za vreme zameni u prethodno izvedeni obrazac za pređeni put:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$-a \cdot t = -v + v_0 \quad / (-1)$$

$$a \cdot t = v - v_0$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$S = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$S = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} \cdot \frac{2}{2} + \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a}$$

$$S = \frac{\cancel{2v_0 v} - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2v_0 v} + v_0^2}{2a}$$

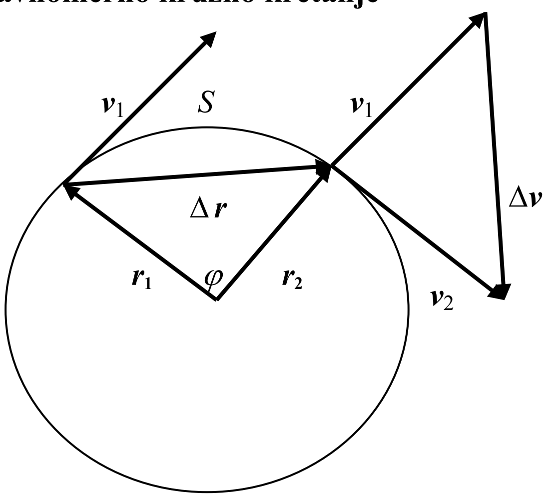
$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$2aS = v^2 - v_0^2$$

$$-v^2 = -v_0^2 - 2aS \quad / (-1)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot S.$$

**Ravnomerno kružno kretanje**




sl. 20.

Kada se telo kreće ravnomerno kružno, tada se može koristiti isti obrazac za brzinu koji smo imali i kod ravnomerno pravolinijskog kretanja

$$v = \frac{S}{t}$$

Ako za pređeni put uzmemo obim kruga

$$S = O = 2\pi \cdot r$$

tada se vreme, koje je potrebno za njegovo prelaženje, naziva period i obeležava sa T (s).

Tada je: $$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}.$$

Kod kružnih kretanja definiše se i veličina koja se naziva frekvencija – a to je broj obrtaja koji telo napravi u jedinici vremena tj. u toku jedne sekunde. Oznaka za frekvenciju je ν, a jedinica je *Hz* tj. Herc. Period *T* i frekvencija ν su recipročne veličine tj.

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{ili:} \quad T = \frac{1}{\nu}.$$

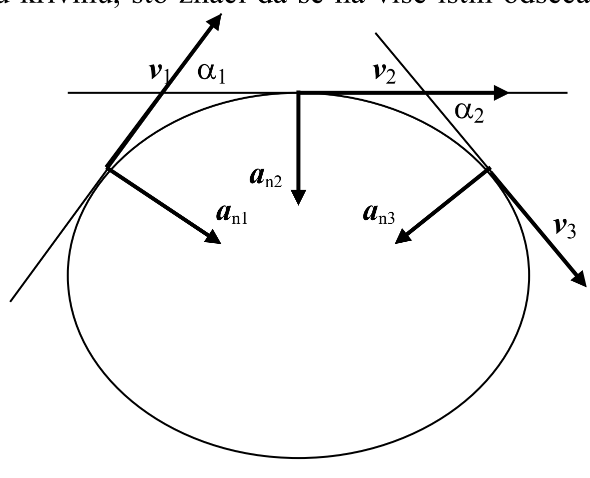
Kod ravnomerno kružnog kretanja brojna vrednost brzine je stalna, pa zato telo nema tangencijalno ubrzanje, ali se menja pravac brzine, pa zato telo ima normalno ubrzanje. Brojna vrednost normalnog ubrzanja je stalna, jer kružna putanja predstavlja pravilnu krivinu, što znači da se na više istih odsečaka puta pravac vektora brzine menja uvek za isti ugao.

Ako na sl. 21. uzmemo dva jednaka odsečka puta na kružnoj putanji, tada je promena pravca brzine na oba puta jednaka. Inače promenu pravca brzine možemo odrediti uglovima: $\alpha_1$ i $\alpha_2$. To znači da su ova dva ugla jednaka, tj. $\alpha_1 = \alpha_2$.

To dalje znači da normalna ubrzanja: $a_{n1}$ i $a_{n2}$ moraju takođe da imaju istu brojnu vrednost, jer određuju dve jednake promene pravca brzine.

Zato se matematičkim jezikom ravnomerno kružno kretanje može opisati sledećim izrazima:

$\boldsymbol{v} \neq const.$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$ ; $a_n = const.$




sl. 21.

Pritom treba imati na umu, da je stalna samo brojna vrednost normalnog ubrzanja, dok je njegov pravac promenljiv, jer je iz svake tačke kružne putanje usmereno ka centru kruga.

Izvedimo sada obrazac za normalno ubrzanje koristeći sl. 20. Svako pa i normalno ubrzanje se definiše kao promena brzine u jedinici vremena, pa ćemo to i napisati, ali u vektorskom obliku:

$$\vec{a}_n = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \text{tj.} \quad a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Trougao koji čine dva vektora položaja: $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ sa vektorom pomeraja $\Delta\mathbf{r}$, i trougao koji čine vektori brzina: $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ sa vektorom $\Delta\boldsymbol{v}$**,** su slični zato što su jednakokraki, a ugao φ između njihovih krakova je isti u oba trougla (kao uglovi sa međusobno normalnim kracima, zato što je između poluprečnika i tangente prav ugao). Iz ove sličnosti imamo sledeću proporciju:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \text{(zato što je: } v_1 = v_2 = v \quad \text{i} \quad r_1 = r_2 = r\text{)}, \quad \text{pa je:} \quad \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r. \qquad \text{Zato je:}$$

$$a_n = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Ako se uzme mali ugao φ, tada ne postoji značajna razlika između: dužine pređenog puta *S* i dužine vektora pomeraja $\Delta r$, tj. $\Delta r \approx S.$

Zato je: $a_n = \frac{v}{r} \cdot \frac{S}{\Delta t}$, a kako je kretanje ravnomerno: $\frac{S}{\Delta t} = v$, pa je: $a_n = \frac{v}{r} \cdot v$

ili konačno: $$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

I iz ovog obrasca se može zaključiti da je brojna vrednost normalnog ubrzanja stalna, jer se dobija kao količnik veličina koje su i same konstantne.

Ovaj obrazac je primenljiv i na neravnomerna kružna kretanja, ali tada je $a_n$ trenutno ubrzanje, dok je $v$ trenutna brzina.

## KINEMATIKA ROTACIJE

### Rotacija. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje

Na početku ćemo dati tablicu analognih translatornih i rotacionih veličina:

| **Translacija** | **Rotacija** |
|---|---|
| Pređeni put $S$ ($m$) | Pređeni ugao $\varphi$ ($rad$) |
| Brzina **v** ($m/s$) | Ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$ ($rad/s$) |
| Ubrzanje **a** ($m/s^2$) | Ugaono ubrzanje $\boldsymbol{\alpha}$ ($rad/s^2$) |
| Vreme $t$ ($s$) | Vreme $t$ ($s$) |

Očigledno je, da se iz nekog razloga, prve tri translatorne veličine u tabeli ne mogu koristiti i pri rotaciji tela, dok se vreme može koristiti kod oba kretanja. Pogledajmo razloge za to:

1. Pređeni put i pređeni ugao

Posledica definicije translatornog kretanja tela je da sve tačke na telu pređu jednake dužine puta. Zato je moguće reći koliki put je prešlo celo telo, jer takav podatak važi za svaku njegovu tačku.

Međutim, kada telo rotira, tačke tog tela ne prelaze jednake dužine puteva – tačke bliže osi prelaze kraće, a tačke udaljenije od ose rotacije prelaze duže puteve. Zato je nemoguće reći koliki put je prešlo to telo, zato što se takav podatak ne bi odnosio na svaku tačku tog tela. Ipak postoji veličina koja je jednaka za sve njegove tačke, a to je pređeni ugao $\varphi$, pa se zato u rotaciji umesto pređenog puta koristi pređeni ugao.

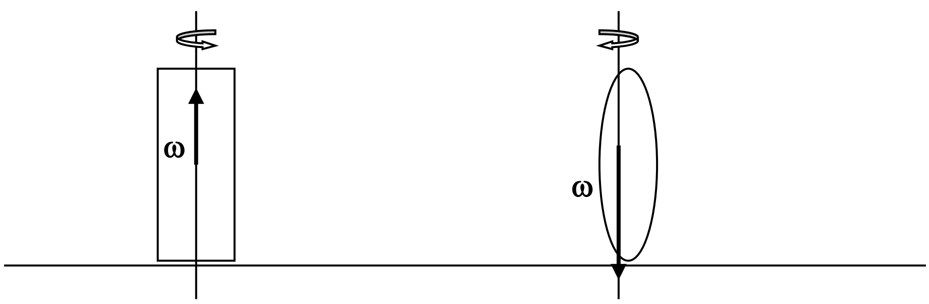
Jedinica za pređeni ugao u fizici je: 1 *rad* – radijan. $1\ rad = \frac{360^0}{2\pi} = 57{,}324^0$

2. Brzina i ugaona brzina

Pri translaciji sve tačke tela prelaze jednake puteve za isto vreme tj. imaju istu brzinu. Zato je moguće reći kolika je brzina tog tela jer taj podatak važi za svaku njegovu tačku.

Kada telo rotira njegove tačke nemaju iste brzine, jer tačke bliže osi su sporije, dok su tačke udaljenije od ose brže. Zato je nemoguće reći kolika je brzina tog tela, jer se takav podatak ne bi odnosio na svaku njegovu tačku. Međutim sve tačke tela pređu isti ugao za isto vreme tj. sve tačke tela imaju istu ugaonu brzinu. Zato se u rotaciji umesto brzine koristi ugaona brzina.

Pravac vektora ugaone brzine je na osi rotacije tela, a njegov smer je određen pravilom desne ruke koje glasi: savijeni prsti desne ruke pokazuju smer vrtnje tela, a ispruženi palac određuje njegov smer.




sl. 22.

3. Ubrzanje i ugaono ubrzanje

U translaciji ubrzanje služi da odredi promenu brzine. U rotaciji ugaono ubrzanje služi da odredi promenu ugaone brzine.

4. Vreme

Vreme teče jednako, nezavisno od načina kretanja tela, pa se zato može koristiti i u translaciji i u rotaciji.

Kao i u translaciji, tako i u rotaciji postoje četiri osnovna tipa kretanja:

| **Translacija** | **Rotacija** |
|---|---|
| Ravnomerno - $v = const.$ | Ravnomerno - $\omega = const.$ |
| Neravnomerno - $v \neq const.$ | Neravnomerno - $\omega \neq const.$ |
| Pravolinijsko – pravac $\vec{v} = const.$ | Bez precesije – pravac $\vec{\omega} = const.$ |
| Krivolinijsko – pravac $\vec{v} \neq const.$ | Sa precesijom – pravac $\vec{\omega} \neq const.$ |

Precesija znači pomeranje, tj. klaćenje ose rotacije. Kako je vektor ugaone brzine vezan svojim pravcem za osu rotacije, jasno je da će promena pravca ose pri precesiji dovesti i do promene pravca vektora ugaone brzine.

U kinematici postoji potpuna analogija između zakona translatornog i zakona rotacionog kretanja. Naime, postoje analogna kretanja. Četiri moguće kombinacije kretanja u translaciji, imaju svoje četiri analogne kombinacije u rotaciji:

- ravnomerno pravolinijskom kretanju analogna je ravnomerna rotacija bez precesije,
- neravnomerno pravolinijskom kretanju analogna je neravnomerna rotacija bez precesije,
- ravnomerno krivolinijskom kretanju analogna je ravnomerna rotacija sa precesijom i
- neravnomerno krivolinijskom kretanju analogna je neravnomerna rotacija sa precesijom.

Međutim, analogija se proširuje i na obrasce i definicije. To znači da se u određenom translatornom obrascu ili definiciji mogu translatorne veličine zameniti analognom rotacionim veličinama iz tabele, čime nastaje odgovarajući tj. analogni rotacioni zakon. Primeri:

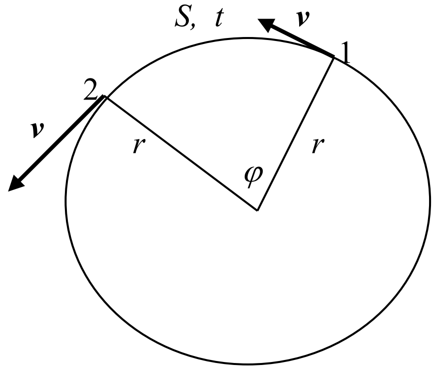
| **Translacija** | **Rotacija** |
|---|---|
| Ravnomerno pravolinijsko kretanje | Ravnomerna rotacija bez precesije |
| $v = \dfrac{S}{t}$ | $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$ |
| Pravolinijsko kretanje sa stalnim ubrzanjem | Rotacija bez precesije sa stalnim ugaonim ubrzanjem |
| $v = v_0 \pm a \cdot t$ | $\omega = \omega_0 \pm \alpha \cdot t$ |
| $v_{sr} = v_0 \pm \dfrac{a \cdot t}{2}$ | $\omega_{sr} = \omega_0 \pm \dfrac{\alpha \cdot t}{2}$ |
| $S = v_0 \cdot t \pm \dfrac{a \cdot t^2}{2}$ | $\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \dfrac{\alpha \cdot t^2}{2}$ |
| $v^2 = v_0^2 \pm 2 \cdot a \cdot S$ | $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$ |

Kao što je već rečeno, ovakva analogija je primenljiva i na definicije. Recimo, u translaciji imamo sledeću definiciju: ***Brojna vrednost ubrzanja određuje kolika je promena brzine u jedinici vremena,*** a u rotaciji imamo analognu definiciju, koja se dobija prostom zamenom translatornih veličina rotacionim: ***Brojna vrednost ugaonog ubrzanja određuje kolika je promena ugaone brzine u jedinici vremena,*** itd. Jedina stvar u kojoj analogija ne važi je način crtanja vektorskih translatornih i rotacionih veličina, što se uostalom moglo ranije videti iz načina crtanja vektora ugaone brzine.

Razmotrimo sada mogućnost povezivanja translatornih sa odgovarajućim rotacionim veličinama. To je moguće jedino ako postoji kretanje koje možemo smatrati istovremeno i translatornim i rotacionim. Takvo kretanje je kružno kretanje, što ga izdvaja od ostalih kretanja, pri čemu treba voditi računa da dobijene veze važe samo kod kružnog kretanja tela tj. materijalne tačke.

Pogledajmo sada primer kružnog kretanja materijalne tačke na sl. 23. Može se videti da je u toku vremena ( $t$ ) ona prešla put ( $S$ ) koji predstavlja luk, tj. deo njene kružne putanje, krećući se ravnomerno brzinom ( $v$ ). Očigledno je da, opisujući kretanje na ovaj način, ovo kretanje smatramo translatornim, jer u opisivanju koristimo translatorne veličine.

Međutim ovo kretanje možemo opisati i na sledeći način: u toku vremena ( $t$ ) telo je prešlo ugao (φ), krećući se ravnomerno ugaonom brzinom (ω). Sada je jasno da u ovom opisu ovo kretanje smatramo rotacionim, jer za opisivanje koristimo rotacione veličine.



sl. 23.

Kako je u geometriji luk jednak proizvodu poluprečnika kruga i odgovarajućeg centralnog ugla (ako je ugao izražen u radijanima), dobija se tražena relacija između pređenog puta i pređenog ugla:

$$S = r \cdot \varphi$$

Sledeća veza između brzine i ugaone brzine dobija se ako se prethodna relacija podeli vremenom potrebnim da se taj put tj. taj ugao pređe:

$$\frac{S}{t} = r \cdot \frac{\varphi}{t}$$

kako je kretanje ravnomerno sledi: $v = \dfrac{S}{t}$ i $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$, pa je:

$$v = r \cdot \omega .$$

Ako uzmemo da je kretanje po krugu ubrzano i da se u tački 1 telo nađe u trenutku vremena $t_1$ sa brzinom $v_1$, a kasnije u tački 2 u trenutku vremena $t_2$ sa povećanom brzinom $v_2$, tada je:

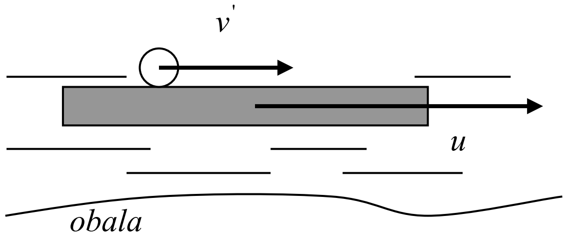
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{r \cdot \omega_2 - r \cdot \omega_1}{t_2 - t_1} = r \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r \cdot \alpha , \quad \text{dakle:}$$

$$a = r \cdot \alpha .$$

**Klasični zakon sabiranja brzina**

Posmatrajmo slučaj prikazan na sl. 24. Imamo kuglu koja se kotrlja po splavu brzinom $v'$ u odnosu na njega, dok se istovremeno splav kreće brzinom $u$ u odnosu na obalu nošen rekom. Tada se brzina kugle u odnosu na obalu $v$ može izračunati iz obrasca:

$$v = v' + u .$$



sl. 24.

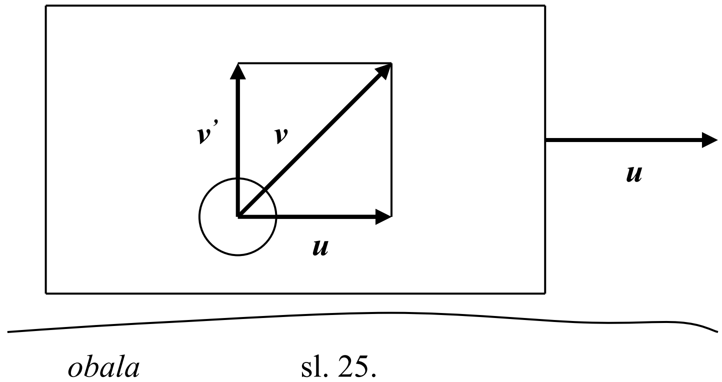
U slučaju da se splav i kugla kreću u suprotnim smerovima, klasični zakon sabiranja brzina postaje praktično zakon njihovog oduzimanja: $v = v' - u$, pri čemu brzina kugle u odnosu na obalu ima isti smer sa onom brzinom čija je brojna vrednost veća.

Ako vektori brzina $\vec{v}'$ i $\vec{u}$ imaju različite pravce tada primenjujemo klasični zakon sabiranja brzina u vektorskom obliku, što i jeste najopštiji oblik ovog zakona:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} .$$

Na sl. 25. prikazan je splav iz ptičje perspektive, a ugao između vektora brzina $\vec{v}'$ i $\vec{u}$ je $90^0$, što omogućava izračunavanje brojne vrednosti brzine kugle u odnosu na obalu primenom Pitagorine teoreme:

$$v^2 = (v')^2 + u^2 .$$



sl. 25.

Ako kuglu iz prethodnog slučaja proglasimo telom koje se kreće, ako splav proglasimo pokretnim referentnim telom, a koordinatni sistem vezan za njega pokretnim referentnim sistemom i na kraju ako obalu uzmemo za nepokretno referentno telo, a koordinatni sistem vezan za nju uzmemo za nepokretni referentni sistem, tada se klasični zakon sabiranja brzina može izreći na sledeći način: ***Brzina tela u odnosu na nepokretni referentni sistem je vektorski zbir njegove brzine u odnosu na pokretni referentni sistem i brzine pokretnog referentnog u odnosu na nepokretni referentni sistem.***

**Princip relativnosti**

Galilejev princip relativnosti glasi:

***Izabrana mehanička pojava će se dešavati na potpuno isti način u različitim inercijalnim sistemima.***

Ajnštajn je kasnije proširio ovaj zakon na sve fizičke pojave. Jasno je da Galilej nije mogao razmatrati dešavanje fizičkih pojava, zato što u njegovo vreme fizika nije još uvek postojala kao nauka, već je postojala samo mehanika, koja inače danas predstavlja deo fizike.

Inercijalan sistem, iz definicije, je svako telo koje nema ubrzanje, dakle to su sva tela koja miruju ili se kreću ravnomerno pravolinijski. Da bi takvo telo odgovaralo definiciji mora da bude šuplje da bi se u njemu uopšte mogla odigravati neka fizička pojava, a najbolje bi bilo da se ono može po našoj volji kretati na određen način ili mirovati. Zato bi najbolji izbor inercijalnog sistema bilo neko prevozno sredstvo: avion, podmornica, autobus... Za mehaničku odnosno fizičku pojavu uzećemo oscilovanje klatna.

Zamislimo dva aviona, od kojih jedan miruje dok drugi leti ravnomerno pravolinijski. Sada u oba aviona stavimo dva jednaka klatna i izazovimo njihova oscilovanja istovremeno i sa istim uglom početnog otklona. Dakle jedina razlika je u stanju mirovanja tj. ravnomerno pravolinijskog kretanja u kojima se nalaze avioni kao dva različita inecijalna sistema. Da li će to izazvati razliku u načinu oscilovanja klatna u njima? Galilej i Ajnštajn nam kažu da nikakve razlike neće biti tj. da će oba klatna oscilovati na potpuno isti način.

Do razlike u oscilovanju će doći jedino ako se jedan od tih aviona kreće: ubrzano, usporeno ili krivolinijski jer tada u avionu deluje neka inercijalna (fiktivna) sila koja će izazvati razliku u oscilovanju. Mi imamo iskustvo sa takvim silama, one nas u stvari primoravaju da se držimo za rukohvate kada stojimo u autobusu.

Dolazimo dakle do zaključka da inercijalni sistemi pružaju ravnopravne uslove za dešavanje svih fizičkih pojava, a to je u stvari i razlog što se pojave u njima dešavaju na isti način.

Čovek lično doživljava princip relativnosti kao nemogućnost raspoznavanja inercijalnog sistema koji miruje od onog koji se kreće, kada je zatvoren u njemu. Galilej tome dodaje da nikakvim eksperimentom izvedenim u tom inercijalnom sistemu, čovek zatvoren u njemu ne može doznati da li je sistem u stanju mirovanja ili ravnomerno pravolinijskog kretanja – pritom je jasno da eksperiment mora biti ograničen na unutrašnjost sistema. Ovakva nemogućnost, da eksperimentom utvrdimo stanje u kome se nalazi sistem, zasniva se na tome što je eksperiment, u stvari, veštački izazvana prirodna tj. fizička pojava, a sve one se dešavaju na potpuno isti način i u sistemu koji miruje i u onom koji se kreće ravnomerno pravolinijski, pa će rezultati tog eksperimenta biti isti, nezavisno od toga u kojem od ta dva sistema je on izveden.