Energija i rad. Zakoni održanja. II deo

Konzervativne i nekonzervativne sile

U konzervativne sile spadaju sve posredne prave sile, tj. sve privlačno – odbojne sile. To su dakle sledeće sile: gravitaciona, elektrostatička, magnetna …

To su takođe sile koje bi izazvale postojanje potencijalne energije tela – kada bi ono bilo izloženo njihovom dejstvu.

Zajednička karakteristika svih ovih sila je sledeće: ***rad ma koje konzervativne sile na zatvorenoj krivolinijskoj putanji, pri čemu se telo vraća u polaznu tačku, jednak je nuli.*** Ovo je ujedno i njihova definicija.

Važna osobina konzervativne sile je da je njen rad – pri premeštanju tela sa jedne ekvipotencijalne površine na drugu – jednak proizvodu jačine upotrebljene sile i normalnog (najkraćeg) rastojanja između te dve ekvipotencijalne površine, bez obzira na oblik puta kojim je telo prešlo sa jedne površine na drugu.

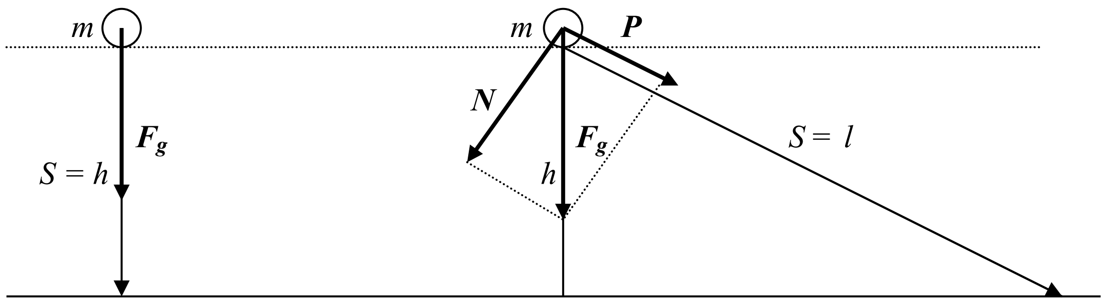
Ova osobina se može i dokazati na primeru gravitacione sile.

Uzmimo dva tela koja se nalaze na istoj visini iznad zemlje i koja posle gubitka oslonaca stižu na njenu površinu, ali različitim putevima. Naime, prvo telo pada vertikalno, dok se drugo telo kotrlja niz strmu ravan, na kojoj se inače nalazi (sl. 5.)

U ovom slučaju se može pokazati da je rad gravitacione sile u oba slučaja potpuno isti i da iznosi:

$$A = F_g \cdot h = m \cdot g \cdot h\,,$$

gde je: m – masa oba posmatrana tela, a h – visina na kojoj se ona nalaze.



sl. 5.

Nad prvim telom gravitaciona sila je izvršila rad:

$$A = F_g \cdot S = m \cdot g \cdot h\,.$$

Rad nad drugim telom, praktično, je izvršila paralelna komponenta P gravitacione sile, jer je ona premestila telo po dužini strme ravni l. Zato je ovaj rad:

$$A = P \cdot S\,.$$

Iz statike znamo da je: $$\frac{P}{F_g} = \frac{h}{l} \Rightarrow P = F_g \frac{h}{l}\,.$$

Zamenom u prethodni izraz dobija se:

$$A = F_g \frac{h}{l} \cdot l = F_g \cdot h = m \cdot g \cdot h\,,$$

što je i trebalo dokazati.

Nekonzervativne sile se još nazivaju i disipativne sile i to su sile otpora sredine i sila trenja. Rad ovih sila je uvek srazmeran putu koji telo pređe, pa će i na zatvorenoj putanji rad ove sile postojati.

Zakon održanja ukupne mehaničke energije

Ukupna mehanička energija tela je zbir njegove kinetičke i potencijalne energije:

$$E_M = E_k + E_p \,.$$

Zakon održanja ove veličine ćemo razmotriti na slučaju kretanja klatna, pri čemu će se izabrani sistem sastojati od eksera (o koji je klatno okačeno), konca i kuglice mase m. Na sl. 6. klatno je prikazano pri oscilovanju: u dva krajnja položaja (obeležena sa 1. i 2.) i u centralnom ravnotežnom položaju (obeleženom slovom R).

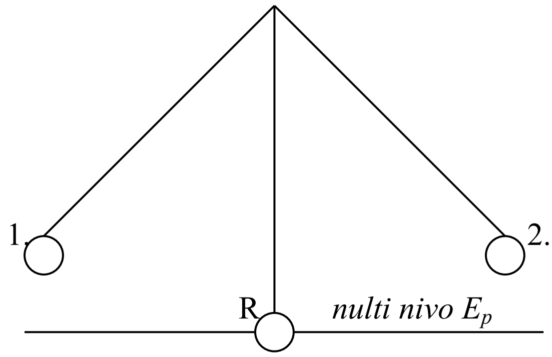
Na početku klatno je izvučeno iz ravnotežnog položaja u položaj 1. i onda je prepušteno delovanju prirodnih sila. To su gravitaciona sila zemljine teže, otpor vazduha i sila trenja u tački vešanja.

Pratićemo kretanje klatna od položaja 1. do položaja 2. Pritom treba pratiti promene kinetičke i potencijalne energije klatna.

Kinetička energija klatna je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \,.$$

Kako je masa klatna (sadržana u kuglici) stalna tokom njegovog kretanja, jedini uzrok promene kinetičke energije može biti promena njegove brzine, što je i pokazano u prva dva reda u tablici.



$v = 0$	$v\uparrow$	$v_{\max}$	$v\downarrow$	$v = 0$
$E_k = 0$	$E_k\uparrow$	$E_{k\max}$	$E_k\downarrow$	$E_k = 0$
$h_{\max}$	$h\downarrow$	$h = 0$	$h\uparrow$	$h_{\max}$
$E_{p\max}$	$E_p\downarrow$	$E_p = 0$	$E_p\uparrow$	$E_{p\max}$

$E_k(J)$	0	1	2	3	4	3	2	1	0
$E_p(J)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$E_M(J)$	4	4	4	4	4	4	4	4	4

sl. 6.

Potencijalna energija klatna (kuglice) je:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \,.$$

Već je rečeno da je masa klatna stalna, a stalnim možemo smatrati i ubrzanje sile zemljine teže g, zato što je promena visine na kojoj se klatno nalazi zanemarljiva u odnosu na poluprečnik Zemlje. Jedina promenljiva veličina na desnoj strani obrasca za potencijalnu energiju je h – visina na kojoj se kuglica nalazi iznad nultog nivoa potencijalne energije. Najpovoljnije je da nulti nivo izaberemo tako da prolazi kroz centar kuglice u ravnotežnom položaju. Zavisnost E_p od h je prikazana u sledeća dva reda tabele ispod sl. 6.

U poslednja tri reda ove tabele brojno je prikazana jedna moguća promena kinetičke i potencijalne energije i u vezi sa tim promenama date su vrednosti ukupne mehaničke energije klatna.

U ovoj lekciji mi tragamo za uslovima da ukupna mehanička energija datog sistema bude stalna. Sudeći po poslednjem redu tabele ovo traganje bi trebalo prekinuti zato što se iz njega jasno vidi da je ova energija već stalna, bez ikakvih posebnih uslova. Međutim, treba razmotriti šta praktično ovakva nepromenljivost ukupne mehaničke energije klatna znači.

Ukupna mehanička energija tela (kao i svaka druga energija tela) je, po definiciji, sposobnost tog tela da vrši rad. Dakle, dva klatna sa različitom mehaničkom energijom bi smo mogli razlikovati po sposobnosti da vrše rad, tj. praktično po dužini putanje po kojoj osciluju. Klatno sa većom E_M bi oscilovalo po dužoj, a klatno sa manjom E_M bi oscilovalo po kraćoj putanji. Prirodan produžetak ove logike bi bio da klatno bez E_M uopšte i ne bi oscilovalo, tj. da bi dužina njegove putanje bila jednaka nuli. Nastavak prethodne logike bi takođe bio i da bi dva klatna sa istom E_M imala jednake dužine putanja.

Na osnovu prethodnog razmatranja možemo zaključiti da stalnost E_M našeg klatna, iz poslednjeg reda tabele, znači nepromenljivu dužinu njegove putanje tokom oscilovanja. Iskustvo nas uči da takva situacija nije realna. Mi znamo da će oscilacije klatna biti prigušene, tj. da će se tokom vremena njihova dužina skraćivati.

Dakle, situaciju u poslednja tri reda tabele bi smo sada mogli uzeti kao postavljeni cilj, a ne kao realnost. Pokušajmo sada da otkrijemo uzroke skraćivanja putanje klatna u praksi, a samim tim i smanjenja njegove ukupne mehaničke energije.

Smanjenje ukupne mehaničke energije je moguće samo ako se ona pretvara u neki od drugih oblika energije. To ukazuje da se pri oscilovanju klatna javlja rad koji ovo pretvaranje predstavlja. A rad uvek vrši neka sila. Koja to sila, ili koje to sile vrše pomenuti rad ?

Kao kandidati pojavljuju se sile koje smo već na početku naveli, a to su: gravitaciona sila, sila otpora vazduha i sila trenja. Ponovo se možemo pozvati na iskustvo i zaključiti da sila otpora vazduha i sila trenja sigurno ometaju kretanje klatna, tj. da baš njih dve vrše pomenuti rad pretvarajući ukupnu mehaničku energiju u toplotnu, čime skraćuju putanju klatna i izazivaju na kraju njegovo zaustavljanje.

Glavni problem je da li to isto radi i gravitaciona sila.

Odgovor na ovaj problem je da gravitaciona sila ne vrši rad nad mehaničkom energijom pretvarajući je u neki drugi oblik. Navešću i razloge za ovakvu tvrdnju.

1. Bez dejstva gravitacione sile klatno se uopšte i ne bi pokrenulo da osciluje. Zamislimo klatno u bestežinskom stanju, koje je izvedeno iz početnog ravnotežnog položaja u položaj 1 a onda prepušteno samo sebi. Upravo zbog odsustva gravitacione sile, ovo klatno se ne bi ni pokrenulo, tj. ono bi ostalo da lebdi u položaju 1. To znači da ako je gravitaciona sila uzrok pokretanja klatna ona ne može biti i uzrok njegovog zaustavljanja. Ovakva logika se temelji na stavu da se jedna prirodna sila ne može, kao recimo čovek, da predomisli – pa da usred svog delovanja počne da radi nešto sasvim drugo u odosu na ono što je do tada radila. Takva promena bi mogla da se dogodi samo ako su bitno promenjeni uslovi u kojima se pojava dešava. Međutim, nikakva promena uslova se ne dešava pri oscilovanju jednog klatna, pa je zaključak da gravitaciona sila nije odgovorna za smanjivanje ukupne mehaničke energije klatna.

2. Sa druge strane, iskustvo i elementarna logika nam kazuju da koliko gravitaciona sila usporava klatno na putu od tačke R do tačke 2, toliko isto ga ona i ubrzava od tačke 1 do tačke R, pri čemu se ova dejstva gravitacione sile međusobno poništavaju. Ukupno gledano gravitaciona sila ništa ne radi na konačnom zaustavljanju klatna, tj. na smanjivanju njegove ukupne mehaničke energije. Ovakvu logiku smo već koristili u lekciji – potencijalna energija tela u gravitacionom polju, u misaonom eksperimentu u kome je objašnjen način kretanja tela u tunelu koji prolazi kroz centar planete.

Gravitaciona sila, u stvari, vrši rad na putu kuglice od tačke 1 do tačke 2, ali tako što pretvara prvo potencijalnu energiju u kinetičku, a onda kinetičku energiju nazad u potencijalnu. Ovakav rad gravitacione sile ne narušava ukupnu količinu mehaničke energije klatna, zato što je ona zbir ove dve energije.

3. Treći razlog je u načinu na koji rad vrše konzervativne i nekonzervativne sile.

U ovom slučaju konzervativna gravitaciona sila vrši mehanički rad po obrascu:

$$A = F_k \cdot r ,$$

gde je r dužina vektora pomeraja. Uzmimo jednu punu oscilaciju klatna, tj. njegovo kretanje od tačke 1 preko tačke 2 nazad u tačku 1. Na ovakvom putu dužina vektora pomeraja je jednaka nuli: $r = 0$ jer se početna i krajnja tačka puta poklapaju, zbog čega je i rad konzervativne gravitacione sile jednak nuli. To znači da konzervativna gravitaciona sila ne pretvara ukupnu mehaničku energiju tela u druge oblike energije.

Za razliku od konzervativnih sila, nekonzervativne sile (a to su u slučaju oscilovanja klatna sila otpora vazduha i sila trenja) vrše mehanički rad po obrascu:

$$A = F_{nk} \cdot S ,$$

gde je S dužina pređenog puta. Kako put, pri punoj oscilaciji, nije jednak nuli, dobija se da mehanički rad nekonzervativnih sila: trenja i otpora vazduha postoji, što znači da one pretvaraju ukupnu mehaničku energiju sistema u druge oblike energije (a u konkretnom slučaju klatna u toplotnu).

Na osnovu svega prethodno rečenog nije teško zaključiti koji su to uslovi potrebni da ukupna mehanička energija klatna ostane stalna. Potrebno je samo ukloniti nekonzervativne sile: trenja i otpora vazduha. U opštem slučaju ma kog proizvoljno izabranog sistema treba ukloniti sve nekonzervativne sile – i spoljašnje i unutrašnje – jer one pretvaraju mehaničku energiju u druge oblike.

Međutim treba ukloniti i sve one sile koje su u stanju da druge oblike energije pretvore u mehaničku. Na primer ja bih mogao da na posmatrano klatno delujem spolja, tako što bih ga, recimo, gurnuo rukom – tako da izazovem povećanje njegove kinetičke, a samim tim i njegove ukupne mehaničke energije. Zato sistem mora biti zatvoren za dejstvo ovakvih spoljašnjih sila. Dakle:

Ukupna mehanička energija zatvorenog sistema će ostati stalna ako uklonimo sve nekonzervativne sile.

Prethodna definicija predstavlja zakon održanja ukupne mehaničke energije.

Na kraju, postaje jasan i naziv ovih sila. Njihovo ime potiče od latinskog glagola: konservo, konservare – što znači čuvati, sačuvati. Dakle konzervativne sile čuvaju ukupnu mehaničku energiju datog sistema, a nekonzervativne sile je ne čuvaju, već je pretvaraju u druge oblike.

Kinetička energija tela koje rotira

Ili rotaciona kinetička energija tela se javlja pri rotaciji tela.

Obrazac za kinetičku energiju tela koje se kreće translatorno glasi:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 .$$

Zamenom translatornih veličina analognim rotacionim veličinama – masa m se zamenjuje momentom inercije I, a brzina tela v se zamenjuje ugaonom brzinom ω - dobija se obrazac za rotacionu kinetičku energiju tela:

$$E_{krot.} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 .$$

Snaga $P\,(\,W\,)$

Snaga je brzina vršenja rada. Ili drugim rečima: ***snažnije telo brže vrši rad.***

Obrazac za snagu je:

$$P = \frac{A}{t}$$

gde je A izvršeni rad, a t je vreme potrebno da se taj rad izvrši. Ovaj obrazac se može pročitati i na sledeći način: ***snaga je brojno jednaka radu koji se izvrši u jedinici vremena.***

Pogledajmo sada da li dati obrazac stvarno govori isto što i početna definicija snage: uzmimo da dve mašine vrše isti rad od $A = 300\ J$, jedna za vreme od $t_1 = 10\ s$, a druga za vreme od $t_2 = 20\ s$.

Iz definicije snage može se lako zaključiti da je prve mašina dvostruko snažnija od druge, zato što dvostruko brže obavlja isti rad. Ako je dati obrazac za snagu ispravan on nam mora dati isti odnos snaga ovih mašina. Proverimo:

$$P_1 = \frac{A}{t_1} = \frac{300J}{10s} = 30\frac{J}{s} = 30W \quad \text{i} \quad P_2 = \frac{A}{t_2} = \frac{300J}{20s} = 15\frac{J}{s} = 15W .$$

Zaključak je da je obrazac u skladu sa datom definicijom.

Jedinica za snagu je 1 *vat*, u čast Džejmsa Vata (Watt) pronalazača parne mašine.

$$1W = \frac{1J}{1s}$$

Telo je upotrebilo, pri vršenju rada, snagu od 1 vata ako je za 1 sekund izvršilo rad od 1 džula.

Stara, a u fizici zabranjena jedinica za snagu je 1 *KS* – jedna konjska snaga. Ona se još uvek koristi u svakodnevnom životu, naročito za izražavanje snage motora kod automobila. Zbog toga evo njene veze sa regularnom fizičkom jedinicom za snagu, a to je 1 vat:

$$1KS = 735{,}5W .$$

Približno, jedna konjska snaga iznosi tri četvrtine jednog kilovata. To znači da motor snage 60 *kW* ima približno 80 *KS*.

Pri ravnomernom kretanju tela snaga se može izračunati i na sledeći način:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot S}{t} = F \cdot v , \quad \text{zato što je samo kod ravnomernih kretanja:} \quad v = \frac{S}{t} .$$

Zakon održanja momenta impulsa

Definicija: ***U zatvorenom sistemu ukupan moment impulsa mora ostati stalan.***

Da se podsetimo – moment impulsa imaju sva tela koja rotiraju kao i sva tela koja se kreću kružno.

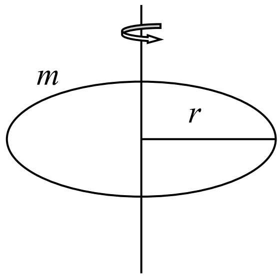
Ako telo rotira, njegov moment impulsa izračunavamo iz obrasca:

$$L = I \cdot \omega \, ,$$

gde je I – moment inercije tog tela, a ω - njegova ugaona brzina. Važno je podsetiti se da moment inercije tela ima opšti oblik obrasca:

$$I = n \cdot m \cdot r^2 \, ,$$

gde je: n – brojni faktor čija vrednost zavisi od oblika tela i položaja ose rotacije, m – masa tog tela i r – poluprečnik rotacije, tj. rastojanje od ose rotacije do najudaljenije tačke na telu.



Ako se telo mase m kreće po kružnici poluprečnika r, tada se moment impulsa tog tela može napisati kao:

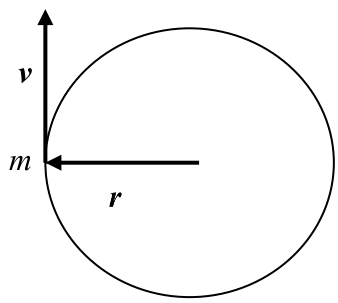
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \, .$$

Njegova brojna vrednost je:

$$L = r \cdot p \cdot \sin\beta \, ,$$

gde je ugao β pri kružnom kretanju uvek 90°, zato što je to ugao između poluprečnika i tangente date kružne putanje tela u istoj tački, a p je impuls tog tela. Kako je:

$$p = m \cdot v \qquad \text{i} \qquad \sin 90^o = 1$$



sl. 6.

sledi:

$$L = r \cdot m \cdot v \, .$$

Definiciju zakona održanja momenta impulsa, datu na početku lekcije, razjasnićemo na sledećim primerima:

Posmatrajmo kretanje klizača na ledu koji izvodi piruetu. Sledi kratak opis ove figure. Na samom početku piruete klizač izmahne raširenim rukama, a jednom nogom se odrazi i tako započinje obrtanje. Tokom obrtanja on postepeno povećava brzinu obrtanja, da bi se na kraju naglo zaustavio.

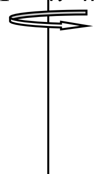
Pitanje je kako uopšte može da postepeno povećava brzinu obrtanja, posebno ako primetimo da se u toku obrtanja uopšte dodatno nogama ne otiskuje o led.

Pažljivim posmatranjem možemo uočiti da jedino što klizač radi, dok povećava brzinu obrtanja, jeste da sakuplja ruke i noge, privlačeći ih ka osi rotacije. Jasno je da ovaj njegov postupak na neki način izaziva povećanje brzine njegovog obrtanja, ali kako ?

Upravo na ovo pitanje odgovar daje zakon održanja momenta impulsa.

Kada klizač krene u piruetu, raširene ruke i noge čine da bude maksimalan njegov poluprečnik rotacije r, što čini da bude maksimalan i njegov moment inercije I, po obrascu: $I = n \cdot m \cdot r^2$.

S obzirom na prosečnu masu klizača od oko 80 *kg*. i na



prosečno rastojanje od grudne kosti do vrha prstiju raširenih ruku od oko 1 *m*. ta maksimalna vrednost momenta inercije iznosi oko 40 $kg\,m^2$. Istovremeno njegova ugaona brzina je minimalna i ne prelazi vrednost od dva obrtaja u sekundi. Ovo je početna situacija. Kako je moment impulsa tela koje rotira:

$$L = I \cdot \omega\,,$$

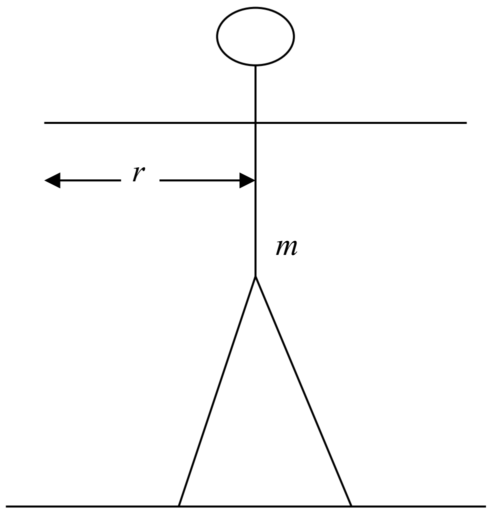
možemo videti da je brojna vrednost momenta impulsa klizača, sa uzetim vrednostima momenta inercije i ugaone brzine:

$$L = 40kgm^2 \cdot 2\frac{obrtaja}{s} = 40kgm^2 \cdot 2\frac{2\pi rad}{s}\,,$$

što približno iznosi:

$$L = 500\frac{kgm^2}{s}\,.$$

Ovo je ukupan moment impulsa klizača, koga smo izabrali za sistem koji posmatramo.



L	=	I	ω
500	=	40	$2\pi \cdot 2$
500	=	20	$2\pi \cdot 4$
500	=	10	$2\pi \cdot 8$
500	=	40	$2\pi \cdot 2$

sl. 7.

Pogledajmo sada da li je ovaj sistem otvoren ili je zatvoren. Na klizača deluju tri sile i to: gravitaciona sila zemljine teže, trenje sa ledom i otpor vazduha. Gravitaciona sila ne utiče neposredno na kretanje klizača jer se ono odvija u horizontalnoj ravni, a sila zemljine teže deluje vertikalno. Međutim postoji njeno posredno dejstvo – kroz silu trenja. Ipak sistem klizača možemo smatrati zatvorenim jer su sile trenja i otpora vazduha zanemarljivo slabe, bar u intervalu vremena u kome se pirueta izvodi, a ona ne traje duže od deset sekundi.

Ako je sistem klizača zatvoren, tada po zakonu održanja momenta impulsa njegov ukupan moment impulsa mora ostati stalan. Dakle vrednost $L = 500\ kgm^2/s$ mora ostati stalna. Međutim, skupljanjem ruku i nogu ka osi rotacije, klizač smanjuje poluprečnik rotacije r, čime smanjuje i moment inercije I. Kako moment impulsa L mora ostati stalan, automatski se povećava njegova brzina obrtanja i to onoliko puta koliko puta se smanji moment inercije – što se može videti iz tabele (sl. 7.).

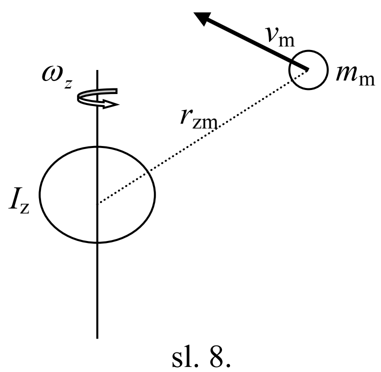
Na kraju da bi se zaustavio klizač naglo raširi ruke i noge, čime vrati moment inercije i brzinu obrtanja na početnu vrednost, pa zabadanjem klizaljki u led, tj. povećanjem sile trenja prekida svoje kretanje.

Ovo povećanje brzine obrtanja sa sakupljanjem tela prema osi rotacije je prisutno u mnogim sportovima. Pažljivo posmatrajte skakača u vodu – ako treba da napravi višestruki salto on će skok izvesti zgrčenim telom, gimnastičar na parteru će salto unazad najčešće izvesti tako što će posle odskoka, izvedenog pruženim telom, zgrčiti telo da bi povećao brzinu obrtanja i da bi stigao da se obrne za pun krug dok je u vazduhu…

Zanimljiv primer se može pronaći u sistemu Zemlja – Mesec. Zemlja rotira oko svoje ose pa zato ima moment impulsa: $L_z = I_z \cdot \omega_z$. Za to vreme Mesec orbitira oko Zemlje po približno kružnoj putanji pa je njegov moment impulsa: $L_m = r_{zm} \cdot m_m \cdot v_m$. Ukupan moment impulsa ovog sistema iznosi:

$$L = L_z + L_m\,.$$

Sistem Zemlja – Mesec možemo smatrati zatvorenim zato što su spoljašnje gravitacione sile znatno slabije od unutrašnje gravitacione sile kojom se Zemlja i Mesec uzajamno privlače.



sl. 8.

Zbog toga što je ovaj sistem zatvoren, njegov ukupan moment impulsa mora ostati stalan:

$$I_z \cdot \omega_z + r_{zm} \cdot m_m \cdot v_m = const.$$

Stalna vrednost ovog zbira je moguća na tri načina: ako su oba sabirka stalna ili ako se jedan smanjuje a drugi povećava za istu vrednost.

Verovatno vam, posle razmišljanja o prirodi veličina u prethodnom izrazu, izgleda najlogičnije prva mogućnost, a to je da su svi članovi ovog izraza stalni.

Međutim istina je da se ugaona brzina Zemlje smanjuje. Objašnjenje ove pojave je sledeće. Zbog privlačne sile Meseca na površini zemaljskih okeana se javlja plima i oseka. Pritom se voda u okeanima stalno diže i spušta, pri čemu se tare o obalu. Pri svakom trenju se stvara izvesna količina toplotne energije. Ali da bi se mogla dobiti ova količina toplotne energije potrebno je da se potoši ista tolika količina neke druge energije i to ako uzmemo u obzir ono što smo naučili u zakonu održanja ukupne mehaničke energije – to bi trebalo da bude baš neki oblik mehaničke energije same Zemlje. Otkriveno je da je to rotaciona kinetička energija kojom Zemlja rotira oko svoje ose. To znači da se ugaona brzina rotacije Zemlje takođe smanjuje, što za posledicu ima produženje trajanja dana i noći na našoj planeti. Ipak razmere ove pojave su jako male jer zbog ovoga sledeći vek u odnosu na prethodni traje duže svega devet sekundi.

Na ovaj način prvi sabirak, u ukupnom momentu impulsa sistema Zemlja – Mesec, se smanjuje što za posledicu ima automatsko povećanje drugog sabirka za istu vrednost, da bi ukupan moment impulsa mogao da ostane stalan. To se i dešava tako što se povećava rastojanje između Zemlje i Meseca r_{zm}.

Ovo znači da će se Zemlja u budućnosti okretati sve sporije, a da će dani i noći na njoj trajati sve duže, sve dok se Mesec, negde u dalekoj budućnosti, ne udalji dovoljno da može da se otrgne gravitacionom privlačenju Zemlje i prestane da bude njen prirodni satelit.

Stabilnost ose rotacije

Pojava iz naslova se javlja kao posledica zakona održanja momenta impulsa u vektorskom obliku. Drugim rečima to znači da se ne održava samo brojna vrednost vektora ukupnog momenta impulsa, već se održavaju i njegovi pravac i smer, normalno pod uslovom da je sistem zatvoren.

Posledice ove pojave su vidljive u sledećem primeru.

Ako pogledate unutrašnjost cevi neke puške primetićete da ona nije savršeno glatka, već da postoji jedno ispupčenje koje se u vidu tanke spiralne crte proteže celom dužinom cevi. Ako malo razmislite možete lako doći do zaključka da je namena ovog spiralnog ispupčenja da izazove rotaciju metka pri prolasku kroz cev. Sve je to jasno, ali šta se time postiže ?

Razlog je sledeći: pri kretanju metak sledi putanju koju smo ranije proučavali kao horizontalni hitac. Pred kraj kretanja, putanja metka se značajno savija naniže i ako metak nema sopstvenu rotaciju tada se i njegov vrh okreće prema zemlji. Naime, telo metka bi, u svakoj tački svoje putanje, zauzimalo pravac tangente na krivolinijsku putanju. Na taj način metak bi, ako pogodi metu neposredno pred kraj svog kretanja, bio već vrhom znatno okrenut naniže – pa bi u metu udario pljoštimice a ne vrhom, što bi smanjilo njegovu ubojitu moć.

Zato se metku zadaje rotacija oko njegove uzdužne ose, koja je pri ispaljivanju paralelna sa podlogom. U pravcu ose rotacije je i vektor momenta impulsa metka, pa kako pravac ovog vektora mora ostati stalan – po zakonu održanja momenta impulsa u vektorskom obliku – zaključujemo da mora ostati stalan i pravac ose rotacije, a to je moguće samo ako položaj tela metka ostane sve do kraja kretanja nepromenjen, a to znači paralelan sa podlogom. To dalje znači da će položaj tela metka sve vreme kretanja biti horizontalan i da će u eventualnu metu on uvek udariti vrhom, što će povećati njegov ubojiti domet.

Kosmičke brzine

U ovoj lekciji biće razmotren način za izračunavanje I i II kosmičke brzine za našu planetu. Pritom će biti korišćen zakon održanja ukupne mehaničke energije tela, recimo rakete, koje bi se ovim brzinama kretalo.

Uzmimo da se raketa lansira sa površine Zemlje brzinom v_0, a da u kružnu orbitu, na visini h iznad zemljine površine, stigne smanjenom brzinom v. Tada raketa pri lansiranju ima kinetičku energiju:

$$E_{k0} = \frac{m \cdot v_0^2}{2},$$

a njena potencijalna energija je:

$$E_{p0} = -\gamma \frac{M \cdot m}{R},$$

gde su: M i R masa i poluprečnik Zemlje, dok je m masa same rakete.

Kada raketa stigne u stabilnu orbitu, na visini h iznad zemljine površine, tada je njena udaljenost od centra Zemlje povećana za h i iznosi:

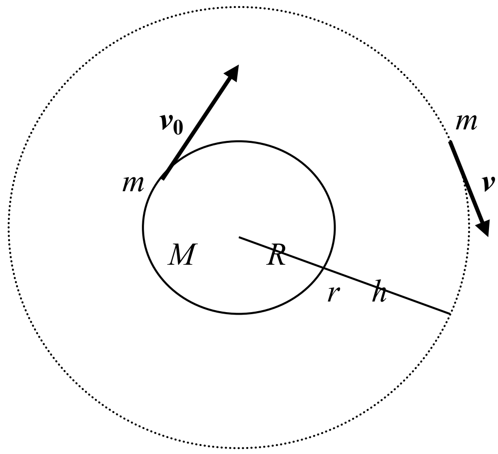
$$r = R + h\,.$$

U ovoj orbiti kinetička energija rakete iznosi:

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}\,,$$

a njena potencijalna energija je:

$$E_p = -\gamma \frac{M \cdot m}{r}\,.$$



sl. 9.

Sada ćemo razmotriti da li sistem rakete ispunjava uslove za održanje svoje ukupne mehaničke energije. Od nekonzervativnih sila na raketu deluje sila otpora vazduha, ali ćemo nju zanemariti, kao i kod svih do sada razmatranih kretanja tela u gravitacionom polju. Prisutna je i konzervativna sila zemljine teže, ali ona ne može promeniti ukupnu mehaničku energiju rakete, već samo može pretvarati njenu kinetičku energiju u potencijalnu ili obrnuto. Posle lansiranja, gravitaciona sila upravo to i radi – ona smanjuje kinetičku energiju rakete, a povećava njenu potencijalnu energiju (na prvi pogled izgleda da se sa povećanim rastojanjem r – potencijalna energija smanjuje, što ona i radi u apsolutnom iznosu, ali treba uzeti u obzir da je potencijalna energija negativna). Dakle, možemo zaključiti da će ukupna mehanička energija rakete – od trenutka lansiranja, pa do ulaska u stabilnu orbitu – ostati nepromenjena:

$$E_{M0} = E_M$$

$$E_{k0} + E_{p0} = E_k + E_p$$

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} - \gamma \frac{M \cdot m}{R} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \gamma \frac{M \cdot m}{r}$$

Iz poslednjeg izraza treba ukloniti orbitalnu brzinu rakete. Ovo se može uraditi izjednačavanjem centripetalne sile, koja je uzrok kružnog kretanja rakete, sa gravitacionom silom kojom Zemlja privlači raketu:

$$F_{cp} = F_g$$

$$m\frac{v^2}{r} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2}$$

množenjem poslednjeg izraza sa $\dfrac{r}{m}$ dobija se:

$$v^2 = \gamma \frac{M}{r}\,.$$

Dobijeni izraz za kvadrat orbitalne brzine zamenimo u izraz za zakon održanja ukupne mehaničke energije:

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} - \gamma \frac{M \cdot m}{R} = \frac{m}{2} \cdot \gamma \frac{M}{r} - \gamma \frac{M \cdot m}{r}$$

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} = \gamma \frac{M \cdot m}{R} + \gamma \frac{M \cdot m}{2r} - \gamma \frac{M \cdot m}{r} / \cdot \left(\frac{2}{m}\right)$$

$$v_0^2 = \gamma \frac{2M}{R} + \gamma \frac{M}{r} - \gamma \frac{2M}{r}$$

$$v_0^2 = \gamma \cdot M \cdot \frac{2}{R} - \gamma \cdot M \frac{1}{r}$$

$$v_0 = \sqrt{\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Pri razmatranju poslednjeg izraza treba uzeti u obzir da je lansiranje rakete zamišljeno tako da je raketni pogon radio samo pri poletanju, dok raketa nije postigla brzinu v_0. Takođe je zamišljeno da raketni pogon radi vrlo kratko vreme, s obzirom da se uzima da brzina rakete već pri poletanju sa same površine iznosi v_0. Od tog trenutka, pa do ulaska rakete u stabilnu orbitu, kretanje rakete se odvija po inerciji, ali ipak usporeno zbog dejstva gravitacione sile. Značajno je da je raketu potrebno lansirati pod oštrim uglom u odnosu na površinu planete, što je i prikazano na sl. 9.

Inače, dobijeni izraz nam omogućava da izračunamo potrebnu početnu brzinu rakete da bi ona mogla da sa površine planete stigne u stabilnu kružnu orbitu na rastojanju r od centra planete. Treba imati na umu da se ovaj obrazac može koristiti i za druga nebeska tela, a ne samo za Zemlju, pri čemu bi jedino morali da znamo masu M i poluprečnik R tog tela.

Prva kosmička brzina.

Definicija: ***Prva kosmička brzina za Zemlju je početna brzina koju mora da dobije telo na njenoj površini da bi uspelo da postane njen veštački satelit, ali na minimalnoj visini iznad njene površine.***

Ovako izrečena definicija znači da je $r \approx R$, što se može zameniti u formuli za brzinu poletanja rakete:

$$v_I = \sqrt{\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R}\right)}$$

$$v_I = \sqrt{\gamma \cdot M \frac{1}{R}}$$

Iz obrasca za jačinu gravitacionog polja Zemlje u tački koja se nalazi na njenoj površini:

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}$$

sledi:

$$\gamma \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

pa je:

$$v_I = \sqrt{g_0 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{R}}$$

i konačno:

$$v_I = \sqrt{g_0 \cdot R}.$$

Ako uzmemo da je: $g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ i $R = 6{,}37 \cdot 10^6 m$, dobija se da je prva kosmička brzina za Zemlju:

$$v_I = 7{,}905 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 7{,}905 \frac{km}{s}.$$

Treba uočiti da je izračunata vrednost I kosmičke brzine za Zemlju prirodna konstanta, jer se izračunava preko dve druge prirodne konstante za našu planetu, a to su jačina gravitacionog polja na njenoj površini i njen poluprečnik.

Druga kosmička brzina.

Definicija: ***Druga kosmička brzina za Zemlju je minimalna početna brzina koju mora da ima telo da bi, poletevši vertikalno sa njene površine, uspelo da napusti njeno gravitaciono polje.***

Ovako izrečena definicija, u matematičkom smislu, znači da bi se takva raketa uspela da beskonačno udalji od zemljine površine, tj.

$$r = \infty .$$

Unošenjem ove vrednosti za r u formulu za brzinu poletanja rakete dobijamo:

$$v_{II} = \sqrt{\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{\infty} \right)}$$

$$v_{II} = \sqrt{\gamma \cdot M \frac{2}{R}} .$$

Upoređivanjem sa obrascem za prvu kosmičku brzinu možemo videti da je:

$$v_{II} = v_I \cdot \sqrt{2}$$

tj.

$$v_{II} = 11{,}179 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 11{,}179 \frac{km}{s} \approx 11{,}2 \frac{km}{s} .$$

Kao i prva i druga kosmička brzina za Zemlju je prirodna konstanta. To znači da su ove brzine iste za sva tela koja poleću sa zemljine površine, nezavisno od njihove veličine, tj. nezavisno od njihove mase.

Na kraju smatram da je potrebno razjasniti još nekoliko zanimljivih pitanja u vezi sa prvom i drugom kosmičkom brzinom.

Jedno od ovih pitanja glasi: <u>da li je moguće orbitiranje oko Zemlje i brzinom koja je manja od prve kosmičke brzine ?</u>

Odgovor je prilično neočekivan, a glasi: moguće je i to što je visina orbitiranja veća – to je za orbitiranje potrebna manja brzina. Treba uzeti u obzir da je prva kosmička brzina po definiciji potrebna za orbitiranje na minimalnoj visini. To praktično znači da je prva kosmička brzina maksimalna brzina orbitiranja. Ovakva tvrdnja zahteva i dokaz.

<u>Odredimo dakle brzinu orbitiranja rakete na visini h iznad površine Zemlje.</u>

Za potrebe ovog zadatka možemo koristiti sl. 9.

Pri kretanju po stabilnoj orbiti na raketu deluje gravitaciona sila, koja je ujedno i centripetalna:

$$F_{cp} = F_g$$

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$v^2 = \gamma \frac{M}{r} .$$

Ako uzmemo da je jačina gravitacionog polja na površini Zemlje:

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}$$

tada sledi: $\gamma \cdot M = g_0 \cdot R^2$,

pa se zamenom u prethodni izraz za orbitalnu brzinu dobija:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{R + h}} .$$

Sada ovaj obrazac možemo koristiti za izračunavanje orbitalne brzine na ma kojoj visini h, pri čemu je potrebno da znamo samo jačinu gravitacionog polja na površini g_0 i poluprečnik planete R.

Kao primer izračunaćemo orbitalnu brzinu na tri visine: a) h = 0 (ili tik iznad površine), b) h = 600 km = 6 10^5 m =0,6 10^6 m i c) h = 1 000 km = 10^6 m.

a)

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{R+0}} = \sqrt{g_0 \cdot R}\,.$$

Ne bi trebalo da nas iznenadi da smo dobili obrazac za I kosmičku brzinu, a to znači da je u ovom slučaju:

$$v = 7{,}905 \text{ km/s}.$$

b)

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\,m\right)^2}{6{,}37\cdot 10^6\,m + 0{,}6\cdot 10^6\,m}} = 7{,}557\cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 7{,}557\frac{km}{s}$$

c)

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\,m\right)^2}{6{,}37\cdot 10^6\,m + 1\cdot 10^6\,m}} = 7{,}349\cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 7{,}349\frac{km}{s}.$$

Jasno je da rezultati ovog zadatka potvrđuju moju prethodnu tvrdnju da orbitalna brzina opada sa visinom, pa da je shodno tome I kosmička brzina, u stvari, maksimalna brzina orbitiranja. Iz dobijenih rezultata se takođe može zaključiti da svaka zadata visina orbitiranja ima svoju odgovarajuću orbitalnu brzinu.

Sasvim je drugo pitanje: <u>a kojom brzinom raketa treba da poleti da bi uspela da uđe u stabilnu kružnu orbitu na željenoj visini h ?</u>

Krenućemo od već poznatog zakona održanja ukupne mehaničke energije rakete, ali ćemo u njemu zadržati brzinu orbitiranja v :

$$\frac{m\cdot v_0^2}{2} - \gamma\frac{M\cdot m}{R} = \frac{m\cdot v^2}{2} - \gamma\frac{M\cdot m}{r} \quad / \cdot\frac{2}{m}$$

$$v_0^2 = v^2 + \gamma\frac{2M}{R} - \gamma\frac{2M}{r}$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2\gamma\cdot M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

od ranije znamo da je: $\gamma\cdot M = g_0\cdot R^2$. *Zamenom ovog izraza i oduzimanjem razlomaka u zagradi sledi:*

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g_0\cdot R^2\frac{r-R}{R\cdot r}}$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g_0\cdot R^2\frac{R+h-R}{R\cdot r}}$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 + \frac{2g_0\cdot R\cdot h}{R+h}}\,.$$

Sada možemo izračunati u sva tri slučaja iz prethodnog pitanja kolika je brzina poletanja, koristeći tri prethodno izračunate brzine orbitiranja:

a) Za orbitiranje na visini h = 0 potrebna je brzina poletanja :

$$v_0 = \sqrt{\left(7{,}905\cdot 10^3\,\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 6{,}37\cdot 10^6\,m\cdot 0}{6{,}37\cdot 10^6\,m + 0}} = 7{,}905\cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 7{,}905\frac{km}{s}$$

Ovakav rezultat se i mogao očekivati, zato što pri uzletanju u orbitu na minimalnoj visini praktično nema gubitka početne kinetičke energije rakete, tj. nema gubitka u brzini. Drugim rečima brzina uzletanja v_0, u ovom slučaju, jednaka je brzini orbitiranja v.

b) Za orbitiranje na visini h = 600 km brzina poletanja je:

$$v_0 = \sqrt{\left(7{,}557 \cdot 10^3 \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m \cdot 0{,}6 \cdot 10^6 m}{6{,}37 \cdot 10^6 m + 0{,}6 \cdot 10^6 m}} = 8{,}238 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 8{,}238 \frac{km}{s}.$$

c) Za orbitiranje na visini h = 1000 km brzina poletanja mora biti:

$$v_0 = \sqrt{\left(7{,}349 \cdot 10^3 \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m \cdot 1 \cdot 10^6 m}{6{,}37 \cdot 10^6 m + 1 \cdot 10^6 m}} = 8{,}424 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 8{,}424 \frac{km}{s}.$$

Iz dobijenih rezultata se jasno vidi da je za postizanje veće orbitalne visine raketi potrebna veća početna brzina v_0. Iz dobijenih rezultata proističe mogućnost dodatka definiciji prve kosmičke brzine:

Prva kosmička brzina za Zemlju je <u>minimalna</u> početna brzina koju mora da dobije telo na njenoj površini, da bi uspelo da postane njen veštački satelit, ali u tom slučaju na minimalnoj visini iznad njene površine.

<u>Dakle I kosmička brzina je minimalna početna brzina, ali istovremeno i maksimalna orbitalna brzina tela.</u>

Sa povećanjem početne brzine (sve do II kosmičke brzine), raketa će uspevati da uđe u stabilnu kružnu orbitu, ali na sve većoj visini i sa sve manjom orbitalnom brzinom, što je zaključak koji se nameće iz poslednjih brojnih rezultata.

Važno je napomenuti da svi prethodni rezultati važe ako raketa poleće sa površine planete pod uglom različitim od 90°, dakle ukoso. Ako raketa poleće pod pravim uglom u odnosu na površinu planete onda je situacija mnogo jednostavnija jer tada postoje samo dva slučaja:

- ako je brzina rakete manja od II kosmičke brzine ona će izvesti vertikalni hitac i što je početna brzina veća to će biti veća i maksimalna visina na kojoj se rakete zaustavlja i

- ako je brzina rakete veća ili jednaka II kosmičkoj brzini ona će uspeti da usporavajući napusti gravitaciono polje planete.

Na kraju, situacija pri realnom lansiranju jedne orbitalne stanice je mnogo složenija zato što se tada ne sme zanemariti otpor vazduha – koji je promenljiv na vrlo složen način, zato što bi trebalo da raste sa povećanjem brzine rakete, ali da se istovremeno i smanjuje zbog povećanja visine gde je vazduh razređeniji. Takođe situacija koju smo ovde razmatrali razlikuje se od realne zato što se masa rakete realno smanjuje (i to ne zanemarljivo) sa potrošnjom goriva a naročito sa odbacivanjem onih stepena rakete iz kojih je gorivo potrošeno, kao i zato što raketni pogon realno ne deluje samo izvesno jako kratko vreme pri samom poletanju, već praktično sve do ulaska u stabilnu kružnu orbitu. Dalje raketa, iz praktičnih razloga, poleće pod pravim uglom u odnosu na površinu Zemlje, a tek kasnije se naginje na jednu stranu čime koriguje pravac svog kretanja, tako da postepeno prelazi iz vertikalnog u kosi hitac.