DINAMIKA ROTACIJE

Kao i u kinematici prvo ćemo utvrditi koje se veličine koriste u dinamici rotacionog kretanja. Zato ćemo opet uvesti tablicu analognih translatornih i rotacionih veličina. Ova tablica sadrži i već poznate kinematičke veličine, ali i po tri nove dinamičke veličine:

Translacija	**Rotacija**
Pređeni put S (m)	Pređeni ugao φ (rad)
Brzina $\boldsymbol{v}$ (m/s)	Ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$ (rad/s)
Ubrzanje $\boldsymbol{a}$ (m/s^2)	Ugaono ubrzanje $\boldsymbol{\alpha}$ (rad/s^2)
Vreme t (s)	Vreme t (s)
Masa m (kg)	Moment inercije I ($kg\ m^2$)
Impuls $\boldsymbol{p}$ ($kg\ m/s$)	Moment impulsa $\boldsymbol{L}$ ($kg\ m^2/s$)
Sila $\boldsymbol{F}$ (N)	Moment sile $\boldsymbol{M}$ ($N\ m$)

Kao i u translaciji, pokazuje se da nijednu od osnovnih veličina iz dinamike translacije nije moguće upotrebljavati i u dinamici rotacije. Zato su u dinamiku rotacije uvedene tri analogne veličine.

Moment sile - *M* ($N\ m$)

U translaciji sila određuje ubrzanje tela na koje deluje.

U rotaciji ugaono ubrzanje tela nije određeno samo silom koja na to telo deluje, već ga određuju sledeća tri faktora:

- sila - $\boldsymbol{F}$
- krak sile - $\boldsymbol{r}$ i
- ugao - β.

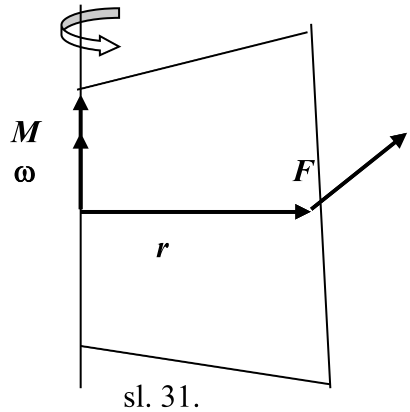
Krak sile je vektor čija je napadna tačka na osi rotacije, dok je njegov vrh u napadnoj tački sile. Pritom je ugao između kraka sile i ose rotacije uvek prav, što znači da je dužina kraka sile, u stvari, najkraće rastojanje od ose rotacije do tačke u kojoj sila deluje na telo.

Ugao β za krake ima vektore: kraka sile i sile tj. $\beta = \angle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F})$.

Ugaono ubrzanje tela koje rotira je direktno srazmerno: jačini sile i dužini kraka sile, dok od ugla β zavisi na složeni sinusni način:

$$\text{ako je } \beta = 0^0 \Rightarrow \sin\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$
$$\text{ako } \beta\uparrow \text{ od } 0^0 \text{ do } 90^0 \Rightarrow \sin\beta\uparrow \Rightarrow \alpha\uparrow,$$
$$\text{ako je } \beta = 90^0 \Rightarrow \sin\beta_{max} \Rightarrow \alpha_{max},$$
$$\text{ako } \beta\uparrow \text{ od } 90^0 \text{ do } 180^0 \Rightarrow \sin\beta\downarrow \Rightarrow \alpha\downarrow,$$
$$\text{ako je } \beta = 180^0 \Rightarrow \sin\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \text{itd.}$$

Ovakvu zavisnost ugaonog ubrzanja α od sile, kraka sile i ugla β možemo objasniti na primeru pokretanja vrata. Pritom treba imati u vidu da vrata vrše rotaciono kretanje oko ose rotacije koja prolazi kroz liniju šarki. Jasno je da će vrata dobiti veće ugaono ubrzanje ako je sila koja na njih deluje jača. Međutim, ukoliko, u dva posebna slučaja, istom silom delujemo na različitim rastojanjima od ose rotacije (a to znači da su u tim slučajevima kraci sile različite dužine) tada će sila koja deluje na dužem kraku sile izazvati i veće ugaono ubrzanje. Uostalom zato su kvake na vratima uvek postavljene što dalje od ose njihove rotacije. Ako sada razmotrimo šta je ugao β videćemo da je to ustvari ugao između vektora sile i površine samih vrata (zato što vektor kraka sile $\boldsymbol{r}$ leži u površini vrata). $\beta = 0^0$ znači da sila i njen krak imaju isti pravac i smer, a to je slučaj kada pokušavamo da vrata istrgnemo iz šarki, što neće dovesti do njihove rotacije. Isto će se desiti i ako delujemo pod uglom od $\beta = 180^0$ što znači da sila i njen krak imaju isti pravac, a suprotan smer, a to je slučaj kada, suprotno od maločas, pokušavamo da vrata sabijemo prema šarkama. Najveće ugaono ubrzanje vrata ćemo dobiti ako na njihovu površinu delujemo pod uglom $\beta = 90^0$. Bilo smanjenje, bilo povećanje ovog ugla dovešće do smanjenja



sl. 31.

ugaonog ubrzanja vrata. Upravo zato su kvake usađene u vrata pod uglom od 90^0.

Dakle, može se reći da je ugaono ubrzanje tela direktno srazmerno proizvodu: kraka sile, sile i sinusa ugla između njih tj. $\alpha \sim r\,F \sin\beta$.

Veličinu: $r\,F \sin\beta$ nazivamo moment sile M tj. $M = r\,F \sin\beta$.

Sada se može reći da moment sile određuje ugaono ubrzanje tela.

Moment sile je vektorska veličina i s obzirom na definiciju njegove brojne vrednosti imamo:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Na sl. 31. pravac i smer vektora momenta sile je određen pravilom desne ruke.

Moment inercije *I* ($kg\,m^2$)

Masa određuje inertnost tela koje se kreće translatorno.

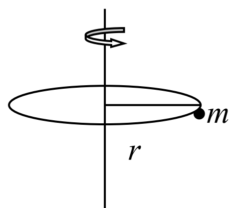
Kada se telo kreće rotaciono njegovu inertnost ne određuje samo njegova masa već čak četiri faktora, a to su:

- masa tela m,
- poluprečnik rotacije r, to je rastojanje od najudaljenije tačke na telu do ose rotacije,
- oblik tela i
- položaj ose rotacije.

Poslednja dva faktora zajedno određuju broj n, pa se može reći da je inertnost tela koje rotira određena sledećom veličinom : $n\,m\,r^2$.

Ova veličina se skraćeno naziva moment inercije I, tj. $I = n\,m\,r^2$**.** To znači da: ***inertnost tela koje rotira određuje njegov moment inercije I.***

Primeri:



sl. 32.

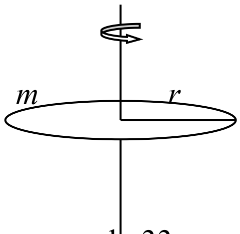
Materijalna tačka mase m koja rotira na rastojanju r od ose rotacije, ili kružni prsten iste mase i istog poluprečnika imaju:

$$n = 1$$

pa je zato njihov moment inercije:

$$I = m\,r^2$$

(ovaj obrazac će biti izveden na kraju ove lekcije).



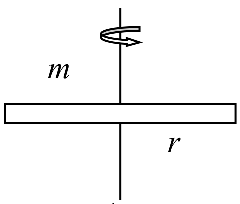
sl. 33.

Ako je posmatrano telo disk mase m i poluprečnika r , tada je:

$$n = ½$$

pa je zato moment inercije kružne ploče:

$$I = ½\,m\,r^2$$



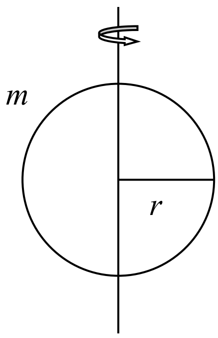
sl. 34.

U slučaju rotacije štapa mase m i ako je polovina njegove dužine r, imamo:

$$n = 1/3$$

pa je u ovom slučaju moment inercije:

$$I = 1/3\,m\,r^2$$



sl. 35.

U slučaju lopte mase m i poluprečnika r brojni faktor n ima vrednost:

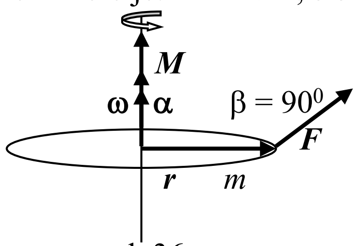
$$n = 2/5$$

pa je moment inercije:

$$I = 2/5\,m\,r^2.$$

U sva četiri prethodna slučaja, navedeni obrasci važe pod uslovom da osa rotacije prolazi kroz centar tela, kao što je na slikama i prikazano.

Sada ćemo pokazati da je za materijalnu tačku mase *m*, koja rotira oko ose rotacije na rastojanju *r* moment inercije: $I = m\,r^2$, što znači da je brojni faktor $n = 1$.



sl. 36.

U primeru na sl. 36. na materijalnu tačku mase m deluje sila ***F***, na rastojanju *r* od ose rotacije, što izaziva kružno kretanje tačke, koje možemo smatrati i rotacijom, pa se tada rastojanje r može smatrati za krak sile ***r***, pri čemu njenu rotaciju izaziva moment sile ***M***, koji ovom telu daje ugaono ubrzanje **α**, zbog čega dolazi do povećanja ugaone brzine **ω**. Sila deluje u odnosu na svoj krak pod pravim uglom, pa je zato brojna vrednost momenta sile:

$M = r\,F\,\sin\beta = r\,F\,\sin 90^0 = r\,F = r\,m\,a = r\,m\,r\,\alpha = m\,r^2\,\alpha$.

U ovom izvođenju korišćen je zakon sile: $F = m\,a$, kao i relacija između ubrzanja i ugaonog ubrzanja tačke koja se kreće kružno: $a = r\,\alpha$.

Dakle imamo: $M = m\,r^2\,\alpha$. Ako ovaj izraz uporedimo sa zakonom sile iz translacije: $F = m\,a$, možemo uočiti analogiju između njih, pri čemu je jasno da je: *M* analogno sa *F*, α sa *a*, dok je izraz $m\,r^2$ analogan sa masom tela *m*. Dakle ako masa tela određuje njegovu inertnost pri translaciji, tada veličina $m\,r^2$ određuje inertnost tog tela pri njegovoj rotaciji i to je traženi moment inercije *I* materijalne tačke na sl. 36.

Moment impulsa *L* ($kg\,m^2/s$)

Kada se telo kreće translatorno, tada jačinu njegovog sudara sa nepokretnom preprekom određuje njegov impuls: p = m v.

Kada se telo kreće rotaciono, tada jačina njegovog sudara sa nepokretnom preprekom ne zavisi samo od njegove mase i brzine tj. njegovog impulsa, već zavisi od sledeća četiri faktora:

- od mase tela *m*,
- od njegove brzine *v*,
- od rastojanja tačke, u kojoj se sudar dešava, od ose rotacije *r* i
- od ugla θ, $\theta = \angle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ – to je, u stvari, ugao pod kojim telo stiže na površinu nepokretne prepreke.

Jasno je da je jačina sudara direktno srazmerna i masi i brzini tela. Međutim, jačina sudara je, takođe, direktno srazmerna i rastojanju *r.* Zato je u boksu zabranjen udarac sa strane ispruženom rukom, već je dozvoljen samo ako je ruka savijena u laktu pod uglom od 90^0 – tzv. kroše, jer bi udarac ispruženom rukom bio, u odnosu na kroše, dvostruko jači, pa bi mogao da bude vrlo opasan. Od ugla θ, jačina udarca zavisi na složen sinusni način, tj. maksimalna je za 90^0. Dakle, jačina sudara tela koje rotira, sa nepokretnom preprekom je direktno srazmerna sa veličinom: $r\,m\,v\,sin\theta$. Ova veličina se u fizici naziva: moment impulsa i obeležava se sa *L*, pa je: $L = r\,m\,v\,sin\theta$. Na kraju, može se reći da ***moment impulsa određuje jačinu sudara tela koje rotira sa nepokretnom preprekom.***

Moment impulsa je vektorska veličina i s obzirom na definiciju njegove brojne vrednosti sledi:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

Zakoni dinamike rotacije

Kao i u kinematici, analogija između fizičkih veličina iz tabele se proširuje i na obrasce i definicije. Na primer, osnovni zakon dinamike translacije:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

ima sebi analogan osnovni zakon dinamike rotacije:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}.$$

Pritom, prvi čitamo: sila je brojno jednaka promeni impulsa u jedinici vremena, a drugi: moment sile je brojno jednak promeni momenta impulsa u jedinici vremena.

Od važnijih obrazaca iz dinamike rotacije pomenimo još:

$$M = I \cdot \alpha, \text{ koji je analogan zakonu sile: } F = m \cdot a$$

$$L = I \cdot \omega, \text{ koji je analogan izrazu za impuls: } p = m \cdot v, \quad \text{itd.}$$

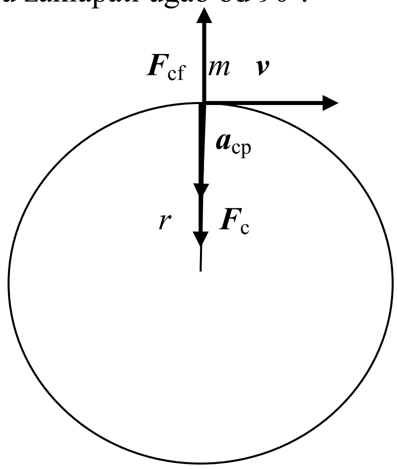
Dinamika kružnog kretanja

Kako je dinamika nauka o uzrocima određene vrste kretanja, očigledno je da je osnovno pitanje u dinamici kružnog kretanja: zašto se telo kreće kružno? Analiza kružnih kretanja različitih tela nas dovodi do zaključka da postoje dva osnovna uzroka kružnog kretanja, tj. da telo mora da ispuni dva uslova da bi se kretalo kružno, a to su:

1. Da na to telo deluje sila koja ga stalno privlači ka centru kružne putanje – centripetalna sila $\boldsymbol{F}_c$ i

2. Da to telo ima brzinu usklađenu sa centripetalnom silom. To znači da brojna vrednost njegove brzine ne sme biti ni premala – jer bi tada telo po spiralnoj putanji palo u centar kruženja, ali ni preveliku – jer bi u tom slučaju telo po spirali napustilo kružnu orbitu udaljavajući se od centra kruženja. Usklađenost takođe znači da vektori brzine tela i centripetalne sile moraju zaklapati ugao od 90^0.

Uzmimo kao primer kretanje Zemlje oko Sunca. Centripetalna sila je gravitaciona i ona u svakoj tački Zemljine putanje našu planetu privlači ka Suncu. Ako uzmemo primer kretanja elektrona oko atomskog jezgra, tada je centripetalna sila – Kulonova sila koja je u ovom slučaju privlačna jer su jezgro atoma i elektron suprotno naelektrisani.



sl. 37.

Centripetalna sila, po II Njutnovom zakonu, telu daje ubrzanje, koje je kao i sama sila uvek usmereno ka centru kruženja. Ako se setimo normalnog ubrzanja tela koje se kreće krivolinijski, postaje jasno da je normalno ubrzanje upravo to ubrzanje koje telu daje centripetalna sila. Kombinacijom obrasca za II Njutnov zakon:

$$F_c = m \cdot a_n$$

i obrasca za normalno ubrzanje kod kružnog kretanja:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

dobija se obrazac za centripetalnu silu:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}.$$

Ovaj obrazac je izuzetno značajan u fizici, jer priroda centripetalne sile može biti različita, pa njegovo izjednačavanje sa obrascem specifičnim za datu silu može dovesti do mogućnosti eksperimentalnog merenja raznih, uglavnom, teško merivih fizičkih veličina.

Sada možemo razmotriti i jednu važnu posledicu kružnog kretanja. Ako uzmemo u obzir da je kružno kretanje tela ubrzano, zato što telo ima normalno ubrzanje, tada je to telo ubrzan sistem, pa će za posmatrača koji se nalazi u njemu delovati fiktivna centrifugalna sila $\boldsymbol{F}_{cf}$. Centripetalna i centrifugalna sila su iste jačine i pravca, a suprotnog smera:

$$\boldsymbol{F}_c = - \boldsymbol{F}_{cf}$$

Bez obzira što ovo isto važi i za sile akcije i reakcije, centripetalna i centrifugalna sila nisu akcija i reakcija, jer ako nastavimo analizu: one deluju istovremeno, ali i na isto telo pa se mogu međusobno poništavati.

DODATAK. Razmotrimo sledeći problem: Ako zamislimo kružno kretanje jednog autobusa po ravnoj i horizontalnoj betonskoj površini, zato što vozač drži volan uvek isto okrenut, postavlja se pitanje – koja je sila u ovom slučaju centripetalna. Na autobus deluju tri spoljašnje sile, a to su: gravitaciona sila zemljine teže, sila trenja sa podlogom i otpor vazduha na čeonu površinu vozila. Jedna od ove tri sile je centripetalna.

Gravitaciona sila odmah otpada zbog toga što deluje u "pogrešnom" pravcu. Naime centripetalna sila bi trebalo da deluje ka centru kružne putanje autobusa – dakle paralelno sa podlogom, dok gravitaciona sila deluje u odnosu na taj pravac pod pravim uglom, tj. u vertikalnom pravcu. Na taj način preostaju sila trenja i sila otpora vazduha. Ovaj problem možemo razrešiti tako što ćemo iz primera ukloniti jednu od ovih sila, pa ako je ona uzrok kružnog kretanja, telo se više neće kretati kružno, a ako nije onda će telo nastaviti sa kružnim kretanjem. Uklonimo prvo silu otpora vazduha: zamislimo autobus koji se kreće na prethodno opisani način, ali pod kupolom ispod koje je vakuum. Možemo, alternativno, zamisliti terensko vozilo sa točkovima i volanom na nekoj planeti koja nema atmosferu. Da li će nedostatak otpora vazduha sprečiti kružno kretanje vozila bez obzira na okretanje volana? Ako *pažljivo razmislimo možemo zaključiti da sila otpora vazduha nema nikakve veze sa kružnim kretanjem vozila, tj. da će se vozilo nezavisno od prisustva ove sile kretati kružno. Sve sada ukazuje na silu trenja. Proverimo i nju na isti način: zamislimo da se umesto po betonskoj podlozi, autobus kreće po ravnoj, glatkoj i vlažnoj ledenoj površini, dok su gume na njegovim točkovima istrošene, ili kako to vozači kažu "ćelave". Svi ovi dodaci su preduslov zanemarljivo male sile trenja. Ako pri ravnomerno pravolinijskom kretanju autobusa vozač okrene volan, autobus neće otpočeti kružno kretanje, već će proklizati pravolinijski. Ono malo sile trenja koja ipak deluje na njegove točkove može samo prouzročiti rotaciju autobusa oko vertikalne ose.*

Dakle u slučaju kretanja nekog vozila po kružnoj putanji centripetalna sila je sila trenja sa podlogom.

Razmotrimo još jedan problem. Zašto se pri brzini većoj od kritične autobus prevrne u krivini – tj. pri kružnom kretanju? Odgovor za posmatrača iz autobusa je da ga je prevrnula centrifugalna sila i to je nesporno. Ali tek sada nastaje problem koji glasi: ali kako može autobus biti prevrnut delovanjem centrifugalne sile kada na njega istovremeno deluje i centripetalna sila trenja. Kako su ove dve sile iste po jačini i pravcu, a suprotne po smeru, to znači da se one međusobno poništavaju. Dakle kako autobus može prevrnuti sila koja je pritom poništena dejstvom druge sile? Usput, poređenja radi, Zemlja se pri kretanju oko Sunca ne prevrće, iako je njena brzina jako velika – oko 30 km/s. Inače Zemljina rotacija oko sopstvene ose nije izazvana njenim eventualnim prevrtanjem zbog dejstva centrifugalne sile, jer bi u tom slučaju položaj ose rotacije Zemlje bio bitno drugačiji.

Rešenje ovog problema je u prirodi centripetalnih sila u navedenim primerima. U slučaju prevrtanja autobusa centrifugalna sila deluje na svaku tačku autobusa – po celoj njegovoj visini, dok centripetalna sila trenja deluje samo na površinu njegovih točkova na onim mestima gde oni dodiruju podlogu. U tim tačkama ove dve sile se i poništavaju, ali na sve ostale tačke autobusa deluje samo centrifugalna sila, koja tako u njima ostaje neponištena, pa će njihov zbir pri dovoljno velikoj brzini biti dovoljno veliki da prevrne autobus. Ta zavisnost centrifugalne sile od brzine je ista kao i kod centripetalne sile jer su njih dve brojno jednake:

$$F_{cf} = F_c = m\frac{v^2}{r}$$

U slučaju kretanja Zemlje oko Sunca i centripetalna – gravitaciona i centrifugalna sila deluju na svaku tačku Zemlje, pa se u svakoj od njih i poništavaju, pa zato u ovom slučaju nema prevrtanja.