

# DINAMIKA FLUIDA – jezički smer

## Uvod. Idealan fluid

U ovoj oblasti se proučava proticanje fluida kroz tzv. strujnu cev.

Fluid je najčešće neka tečnost, ali se u nekim okolnostima može uzeti da je fluid gas.

S obzirom da je veoma komplikovano posmatrati proticanje realnih tečnosti kroz strujnu cev, situacija se uprošćava tako što razmatramo proticanje idealnog fluida.

Idealan fluid se od realnog fluida može razlikovati po sledeće četiri osobine:

- idealan fluid je neprekidna sredina ( kontinuum ) – a to znači da je zanemarena njegova molekularna struktura,

- idealan fluid je nestišljiv, što znači da ga je nemoguće sabijati ali i rastezati. Posledica je da gustina idealnog fluida ima uvek stalnu vrednost:  $\rho = const.$

- pri proticanju idealnog fluida kroz strujnu cev, zanemaruju se viskozne sile ( sile trenja ) između fluida i zidova te cevi i

- zanemaruju se, takođe i viskozne sile između susednih slojeva fluida.

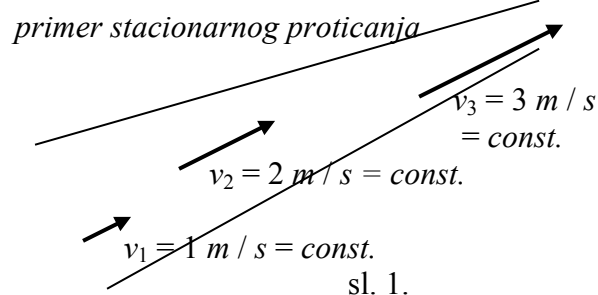
U daljem tekstu će se pod nazivom »fluid« podrazumevati idealan fluid.

## Tipovi proticanja

Prva podela svih proticanja kroz strujnu cev je na: stacionarna i nestacionarna proticanja.

Kada je proticanje fluida stacionarno brzina fluida u različitim tačkama strujne cevi može biti različita, ali zato u svakoj pojedinačnoj tački mora ostati stalna u toku proticanja ( sl. 1.).

Očigledno je da pri nestacionarnom proticanju ovakvog ograničenja nema, što znači da je u tom slučaju brzina fluida haotično promenljiva.



Druga podela svih proticanja je na: laminarna i turbulentna proticanja.

Kako reč turbulencija znači vrtlog, jasno je da su turbulentna proticanja praćena vrtloženjem fluida, dok pri laminarnim proticanjima nema vrtloženja.

Zanimljivo je da je turbulentno proticanje fluida obično praćeno pojačanom bukom, dok je laminarno proticanje tiho. Zato je reka bučna na svojim brzicama, jer voda ne može izbeći vrtloženja, ako teče brzo ( niz strmi nagib ) i ako joj se na putu nađu prirodne prepreke ( obično u vidu velikog kamenja ).

*Način merenja krvnog pritiska moguće je razumeti ako imamo na umu da je laminarno proticanje tiho, dok je turbulentno proticanje bučno.*

*Pritisak krvi u krvnim sudovima varira od svoje max. do svoje min. vrednosti. Ovo je posledica rada srca, koje se naizmenično grči i opušta. Kada se srce zgrči tada je pritisak krvi max. a kada se opusti tada je min. Pretpostavimo da je gornji pritisak krvi u veni 120, a da je donji 80. Merenje se vrši tako što se vazдушnim jastučićem – koje je moguće naduvavati i u kome je moguće meriti pritisak sabijenog vazduha – zatvori jedna vena u ruci na taj način što je pritisak u jastučiću veći od max. pritiska krvi u veni. Sada se otvaranjem ventila pritisak u jastučiću postepeno smanjuje i u početku se ništa ne čuje u slušalicama – pomoću kojih bi trebalo da se sluša buka od proticanja krvi kroz tu izabranu venu. Kada pritisak u jastučiću padne na 120 počinje da se čuje buka u slušalicama, a ona je u ritmu sa otkucajima srca. Ova buka se čuje sve dok pritisak u jastučiću ne padne ispod 80. Ispod 80 u slušalicama ponovo nema nikakvog zvuka.*

*Objašnjenje je sledeće:*

- ako je pritisak u jastučiću veći od 120, tada je izabrana vena potpuno zatvorena za protok krvi, jer je spoljašnji pritisak na venu veći od maksimalnog pritiska krvi, pa nema proticanja krvi kroz nju – a posledica je tišina u slušalicama,

- ako je pritisak u jastučiću između max. i min. vrednosti krvnog pritiska ( recimo 100 ), tada, u skladu sa radom srca, dolazi do naizmeničnog otvaranja i zatvaranja te vene, zato što pritisak krvi veći od 100 otvara venu jer nadmašuje pritisak u jastučiću, dok pritisak krvi manji od 100 nije u stanju da drži venu otvorenu pa se ona tada pod pritiskom jastučića zatvori. Ovakvo naizmenično otvaranje i zatvaranje vene izaziva turbulentno proticanje krvi kroz nju – što za posledicu ima buku koja se tada čuje u slušalicama i

- ako je pak pritisak u jastučiću manji od 80, tada je pritisak krvi u veni dovoljno jak da venu drži stalno otvorenu, a to dozvoljava krvi da laminarno teče kroz nju – što za posledicu ima tišinu u slušalicama, jer znamo da laminarno proticanje fluida nije bučno.

## Jednačina kontinuiteta

Pre nego što dođemo do ove važne jednačine, možemo se zapitati šta će se desiti sa brzinom fluida u cevi ako se cev sužava u smeru proticanja fluida. Odgovor je jednostavan za sve one koji su nekada polivali baštu pomoću creva ili recimo prali automobil. Jasno je da stezanjem izlaznog kraja creva, tj. njegovim sužavanjem povećava brzina izlaznog mlaza vode.

No, sledeće pitanje je malo složenije: a ako se površina poprečnog preseka strujne cevi smanji recimo 3 puta, koliko će se puta tada povećati brzina proticanja fluida kroz nju ?

Vrlo je verovatno pretpostaviti da će se i brzina fluida povećati takođe 3 puta. Međutim brzina bi se mogla povećati i  $3^2 = 9$  puta, ali i  $\sqrt{3} = 1.732$  puta itd. Šta je od ovoga tačno odrediće jednačina kontinuiteta.

Na sl. 2. je strujna cev koja se sužava u smeru proticanja fluida. Posmatramo dva preseka cevi čije su površine  $S_1$  i  $S_2$ . Ako u toku vremena  $\Delta t$  kroz presek  $S_1$  prođe izvesna masa fluida  $m_1$ , tada će u toku istog vremena i kroz presek  $S_2$  proteći ista masa fluida  $m_2$  tj.

$$m_1 = m_2.$$

Ovakav zaključak se zasniva na osobini nestišljivosti fluida – naime kada bi se fluid mogao sabijati u prostoru između ova dva preseka onda bi  $m_2$  bila manja od  $m_1$  i obrnuto kada bi se fluid mogao rastezati onda bi  $m_2$  bila veća od  $m_1$ .

Međutim, zaključak o jednakosti ovih masa se zasniva i na zakonu održanja mase – ako bi masa fluida mogla nastajati ili nestajati u prostoru između izabrana dva preseka, tada mase  $m_1$  i  $m_2$  ne bi morale biti jednake.

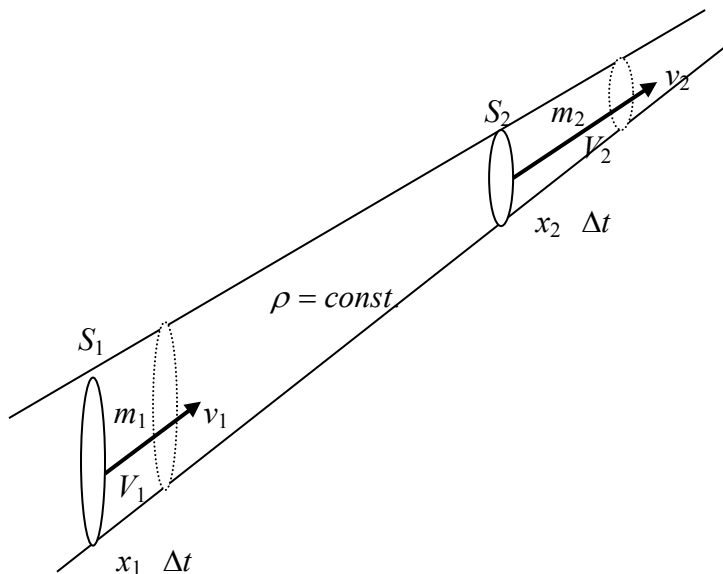
Ove dve mase zauzimaju, na kraju vremena  $\Delta t$  zapremine  $V_1$  i  $V_2$ , pri čemu je prva u toku vremena  $\Delta t$  prešla put  $x_1$ , dok je druga prešla put  $x_2$ .

Kako je gustina fluida:  $\rho = \frac{m}{V}$  sledi:  $m = \rho \cdot V$ . Zamenom se dobija:

$$\rho \cdot V_1 = \rho \cdot V_2 \quad / \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$V_1 = V_2.$$

Do sada smo od relacije:  $m_1 = m_2$  dobili relaciju:  $V_1 = V_2$ . Prevedeno na svakodnevni jezik to znači da ako je kroz preseke u toku vremena  $\Delta t$  protekao, recimo, po 1 kilogram vode,



sl. 2.

tada je kroz preseke protekao po 1 litar vode. Naime, kilogram je jedinica za masu, a litar jedinica za zapreminu.

Kako je zapremina valjka, tj. cilindra jednaka proizvodu površine bazisa i visine, sledi:

$$V_1 = S_1 \cdot x_1 \quad \text{i} \quad V_2 = S_2 \cdot x_2$$

pa je:

$$S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2.$$

Iz kinematike znamo da je: *pređeni put = brzina × vreme*, tj.

$$x_1 = v_1 \cdot \Delta t \quad \text{i} \quad x_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

pa je:

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \quad / \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

dobija se konačno:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

što predstavlja jednačinu kontinuiteta.

Odgovor na ranije postavljeno pitanje ćemo dobiti iz sledećeg brojnog primera: ako je površina prvog poprečnog preseka  $S_1 = 12\text{cm}^2$ , a brzina fluida u njemu  $v_1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , kolika je brzina fluida u drugom preseku ako je njegova površina  $S_2 = 4\text{cm}^2$ ?

Jasno je da je cev sužena tri puta, ali šta je sa brzinom fluida? Primenom jednačine kontinuiteta se dobija:

$$12\text{cm}^2 \cdot 2\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\text{cm}^2 \cdot v_2$$

$$v_2 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{12\text{cm}^2}{4\text{cm}^2}$$

$$v_2 = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Upoređivanjem brzina fluida u oba preseka se vidi da je brzina u tri puta užem preseku cevi tri puta veća. Dakle, zaključak je: koliko puta je strujna cev sužena, toliko puta je brzina fluida povećana.

Jednačina kontinuiteta važi i za veći broj preseka u istoj strujnoj cevi:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = S_3 \cdot v_3 = \dots$$

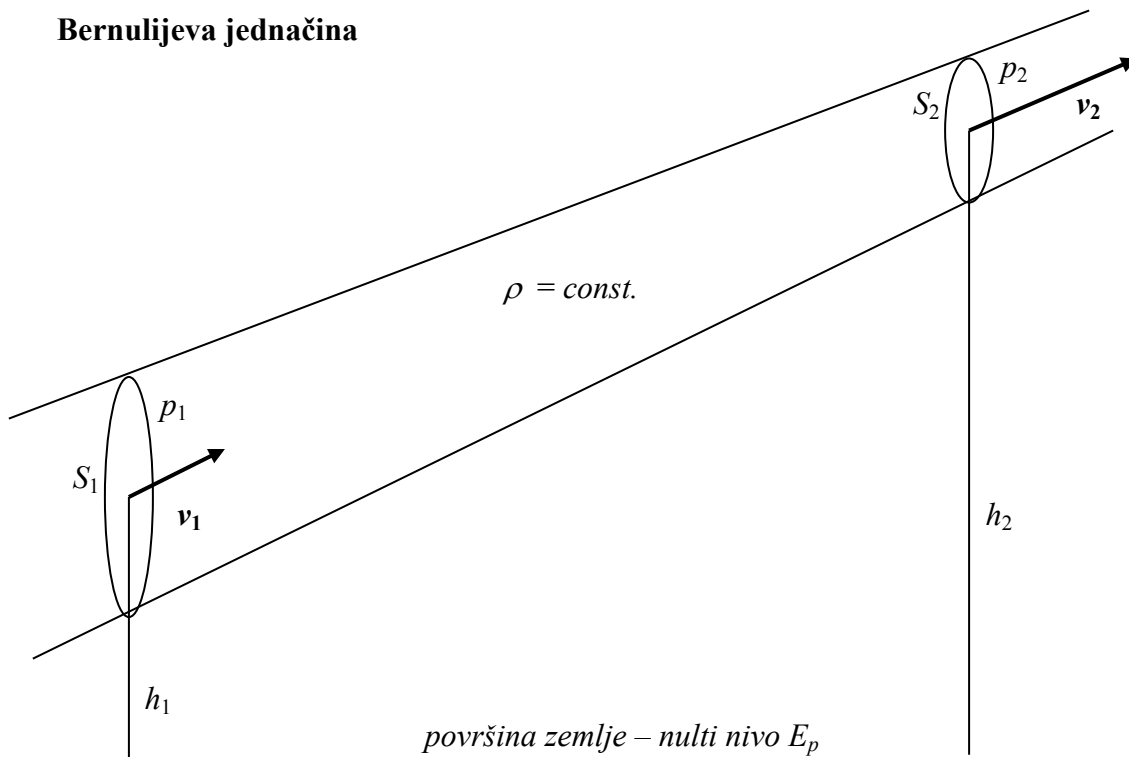
Ovo nas dovodi do mogućnosti da jednačinu kontinuiteta napišemo u skraćenoj formi:

$$S \cdot v = \text{const.}$$

Obe strane jednačine kontinuiteta predstavljaju protok  $q$ . Jedinica za protok je  $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ .

Dakle protok kao fizička veličina pokazuje koliko kubnih metara tj. kolika zapremina fluida protekne kroz dati poprečni presek strujne cevi u jedinici vremena.

## Bernulijeva jednačina



sl. 3.

Bernulijeva jednačina glasi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2.$$

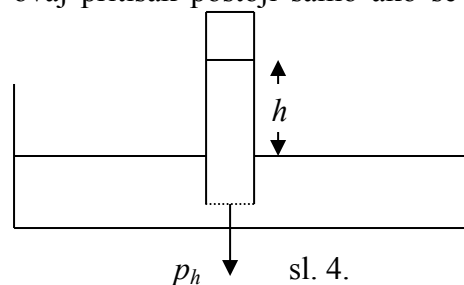
Sva tri sabirka koja čine jednu stranu ove jednačine predstavljaju neku vrstu pritiska.

$p$  – je statički pritisak fluida, a potiče od haotičnog kretanja molekula fluida i od njihovog sudaranja sa zidovima strujne cevi.

$p_d = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$  – je dinamički pritisak fluida, a fluid npr. njime deluje na prepreku na koju naiđe pri svom proticanju. Osnovni uslov za postojanje dinamičkog pritiska je da se fluid kreće brzinom  $v$ . Dobar primer za njegovo delovanje je da voda u reci svojim dinamičkim pritiskom deluje na lopatice vodeničnog točka i okreće ga.

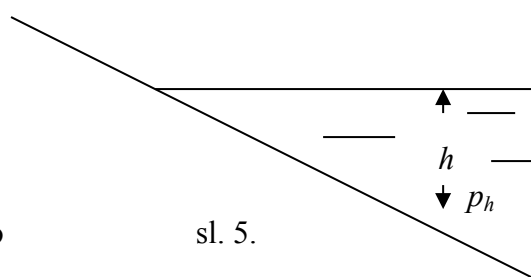
$p_h = \rho \cdot g \cdot h$  – je hidrostatički pritisak fluida, a ovaj pritisak postoji samo ako se fluid nalazi u gravitacionom polju.

Prvi primer je prikazan na sl. 4. Ako je nivo tečnosti u epruveti viši nego u posudi u koju je epruveta potopljena za  $h$ , tada stub tečnosti u epruveti deluje naniže hidrostatičkim pritiskom  $p_h = \rho \cdot g \cdot h$ .



sl. 4.

Drugi primer je prikazan na sl. 5. U ovom slučaju to je pritisak tečnost koji raste sa povećanjem dubine  $h$ , a deluje na sva tela potopljena u nju. Ovaj pritisak je poznat svima koji su nekada ronili. Međutim ovaj pritisak ne deluje samo u moru, već smo i mi izloženi ovom pritisku u zemljinom vazдушnom okeanu tj u zemljinoj atmosferi. Kombinovan sa statičkim pritiskom vazduha čini pritisak koji naše telo trpi, a ako je normalan on iznosi:  $p_A = 101\,325,5\text{ Pa}$ .



sl. 5.

To znači da na  $1 \text{ m}^2$  površine ljudskog tela deluje sila pritiska od  $F_p = 101\,325,5 \text{ N}$ . Kako telo odraslog čoveka ima prosečnu površinu  $S = 2 \text{ m}^2$ , to znači da na naše telo svakog trenutka deluje ukupna sila od oko  $200\,000 \text{ N}$  pokušavajući da ga sabije u što manju zapreminu. Uprkos ovoj ogromnoj sili mi ostajemo nepovređeni zato što je naše telo ispunjeno vazduhom koji iznutra istim tolikim pritiskom, tj istom tolikom silom deluje u suprotnom smeru ( u pokušaju da nam rasprsnje telo ), pa se srećom ove dve suprotstavljene sile međusobno poništavaju.

Značenje Bernulijeve jednačine je sledeće: zbir statičkog, dinamičkog i hidrostatičkog pritiska je jednak u svim presecima date strujne cevi. To nas dovodi do mogućnosti da ovu jednačinu napišemo u skraćenom obliku:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.}$$

Bernulijeva jednačina se može izvesti iz zakona održanja energije. Na to ukazuje sličnost izraza za dinamički pritisak sa izrazom za kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

ali i sličnost izraza za hidrostatički pritisak sa izrazom za potencijalnu energiju:

$$\rho \cdot g \cdot h \quad \text{i} \quad m \cdot g \cdot h$$

U stvari, izraz za oba ova pritiska je dobijen kada je izraz za odgovarajući oblik energije podeljen sa elementom zapremine  $\Delta V$ . Kako tako nastali količnik mase i zapremine predstavlja gustinu fluida, jasno je poreklo izraza za oba ova pritiska.

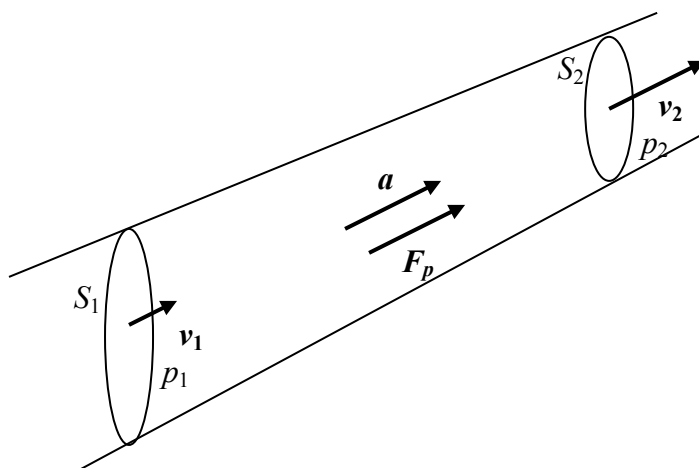
Na isti način statički pritisak potiče od rada, za koji iz termodinamike znamo da ima izraz:

$$A = p \cdot \Delta V.$$

Deljenjem i izraza za rad sa  $\Delta V$  elemenat zapremine se skрати, a ostaje statički pritisak  $p$ .

Zanimljivo pitanje je da li su jednaki statički pritisci fluida u širem i užem preseku iste strujne cevi. Ako pokušamo da dođemo do odgovora na osnovu svakodnevnog iskustva verovatno ćemo pogrešiti i reći da je statički pritisak fluida u užem preseku veći. Postoji dokaz da je to pogrešno i da je tačno upravo obrnuto, tj. da je statički pritisak zapravo veći u širem preseku, tj. tamo gde fluid zbog toga protiče sporije.

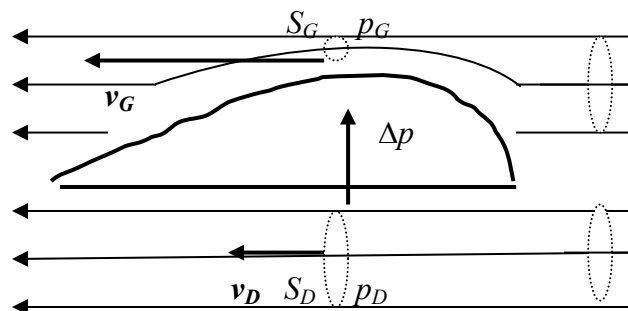
Na sl. 6. je prikazana strujna cev koja se sužava u smeru proticanja fluida. U skladu sa jednačinom kontinuiteta brzina fluida je veća u manjem preseku  $S_2$ . To znači da fluid ubrzava u smeru proticanja, a uzrok ovog ubrzanja može biti samo sila koja potiče od razlike statičkih pritisaka u cevi. Po II Njutnovom zakonu  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , sila i ubrzanje moraju imati isti pravac i smer ( zato što je masa skalar koji ne može biti negativan ). Dakle i sila razlike pritisaka deluje u smeru proticanja fluida. Kako ova sila uvek deluje od mesta većeg ka mestu manjeg statičkog pritiska, zaključak je da je statički pritisak u širem preseku veći od statičkog pritiska u užem preseku.



sl. 6.

Desilo se da je jedan veliki fizičar u XIX veku izjavio da čovek nikada neće moći da napravi spravu koja je teža od vazduha, a koja može da leti. No, to uopšte nije sprečilo braću Rajt da malo posle toga ipak polete prvim avionom. Taj neoprezni naučnik je prevideo mogućnost da na neki način izazovemo veći statički pritisak ispod aviona a manji iznad, pa da sila razlike ovih pritisaka, delujući naviše, drži avion u vazduhu.

Mogućnost za ostvarivanje ovakvog plana se pojavljuje u vezi sa slučajem koji smo prethodno razmatrali. Poprečni presek krila aviona je sa ravnom donjom stranom, dok gornja strana ima aerodinamični oblik. Zbog toga strujna cev vazduha, koji protiče ispod krila, se ne sužava, pa je statički pritisak u tom širokom preseku veliki. Za to vreme strujna cev vazduha, koji protiče iznad krila, ima značajno suženje, pa je statički pritisak u ovom preseku značajno smanjen. Razlika ovih pritisaka:  $\Delta p = p_D - p_G$  deluje naviše na krilo i drži avion u vazduhu (sl. 7.)



sl. 7.

Veći statički pritisak u širem preseku od statičkog pritiska u suženom preseku se može objasniti preko različitih brzina kojima fluid protiče kroz ove preseke. Brzina fluida u širem preseku je manja, dok je brzina u užem preseku veća u skladu sa jednačinom kontinuiteta. Statički pritisak se zasniva na sopstvenom haotičnom kretanju molekula fluida, a u užem preseku makroskopska brzina fluida je veća, pa je na taj način u većoj meri ograničena mogućnost sopstvenog haotičnog kretanja njegovih molekula, a to je uzrok smanjenja mogućnosti njihovog doprinosa statičkom pritisku.

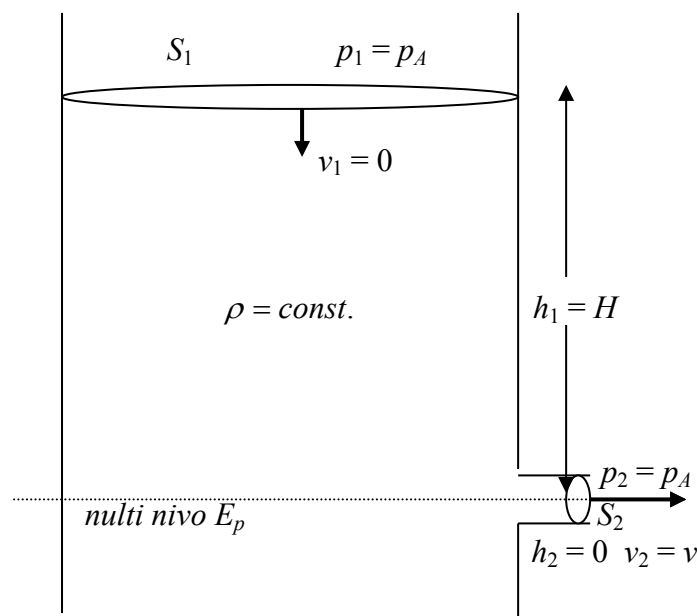
Dakle statički pritisak je manji tamo gde je brzina proticanja fluida veća i obrnuto.

Na taj način jak vetar može da podigne krov sa kuće, naročito ako je krov zatvoren za strujanje vazduha ispod njega. Tada je brzina vazduha ispod krova praktično jednaka nuli, dok je brzina vazduha iznad krova jako velika, ne samo zbog jakog vetra, veći zbog sužavanja strujne cevi vazduha iznad krova ( kao i kod krila aviona ). Ogromna razlika statičkih pritisaka ispod i iznad krova tada može podići krov uvis. Zbog toga ljudi u vetrovitim područjima ostavljaju mogućnost da vazduh struji ispod krova, što smanjuje statički pritisak ispod krova i smanjuje mogućnost štete.

### Toričelijeva teorema

U prvom delu razmotrićemo isticanje tečnosti kroz bočni otvor koji se nalazi na dubini  $H$  ispod nivoa tečnosti u sudu ( sl. 8.). Slobodna površina tečnosti u sudu ima površinu  $S_1$ , dok bočni otvor na sudu ima površinu  $S_2$ . Neka je sud jako širok tako da je presek  $S_1$  mnogo veći od preseka  $S_2$ . Tada je brzina  $v_1$ , kojom se nivo tečnosti u sudu spušta jako mala, pa ju je moguće zanemariti:

$v_1 \approx 0$ . Ako nulti nivo potencijalne energije postavimo na visini koja odgovara bočnom otvoru, tada je visina bočnog otvora jednaka nuli:  $h_2 = 0$ . Statički pritisak fluida na oba preseka je izjednačen sa atmosferskim pritiskom – zato što su slobodne površine tečnosti u oba preseka u toku dužeg vremena u neposrednom kontaktu sa okolnim vazduhom, pa su se njihovi pritisci stigli da izjednače.



sl. 8.

Toričelijeva teorema je primer kako se u ovom slučaju može primeniti Bernulijeva jednačina da bi se izračunala nepoznata brzina isticanja fluida  $v_2 = v = ?$  kroz bočni otvor na sudu ako je poznata dubina  $h_1 = H$  ispod nivoa tečnosti u sudu na kojoj se taj otvor nalazi. Pokazaće se da nam je od veličina potrebno samo da znamo ubrzanje zemljine teže  $g = 9,81m/s^2$ .

Bernulijeva jednačina za ova dva preseka glasi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_A + \frac{1}{2} \rho \cdot 0 + \rho \cdot g \cdot H = p_A + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot 0$$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + p_A - p_A = \rho \cdot g \cdot H$$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot H \quad / \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$v^2 = 2g \cdot H$$

$$v = \sqrt{2g \cdot H} .$$

Zanimljivo je da se isti ovakav obrazac pojavljuje kod slobodnog pada tela. Posmatrajmo telo koje se nalazi na visini  $H$  iznad površine zemlje.

Ako to telo izgubi oslonac i počne da slobodno pada bez početne brzine, a pritom zanemarimo silu otpora vazduha, tada je ubrzanje tela stalno i iznosi:

$$a = g = 9,81m/s^2 .$$

Slučaj je prikazan na sl. 9. a potrebno je odrediti brzinu kojom telo padne na površinu zemlje  $v = ?$

Kretanje je jednako – ubrzano, a pređeni put tela je jednak visini na kojoj se telo nalazi:  $S = H$ .

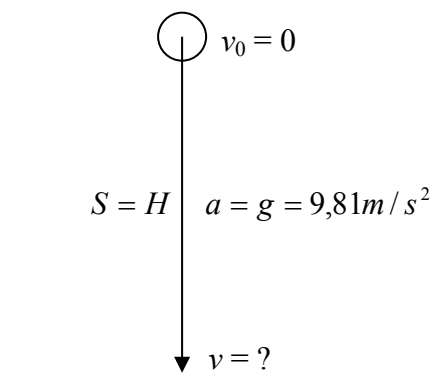
To znači da u ovom slučaju važi obrazac:

$$v^2 = v_0^2 \pm 2a \cdot S$$

Ako zamenimo sve veličine koje imamo dobija se:

$$v^2 = 0 + 2g \cdot H$$

$$v = \sqrt{2g \cdot H} .$$



sl. 9.

Ovu istovetnost obrazaca je uočio i Toričeli i izrekao je u vidu teoreme: Brzina kojom ističe tečnost iz bočnog otvora na sudu koji se nalazi na dubini  $H$  ispod nivoa tečnosti u tom sudu, jednaka je brzini kojom telo slobodno padne na površinu zemlje sa iste tolike visine  $H$ .